조선의 기하학: 구면삼각법

—GIST—

김 영 욱

고려대학교 수학과

2022년 3월 3일 (목)

콜로키움 주제

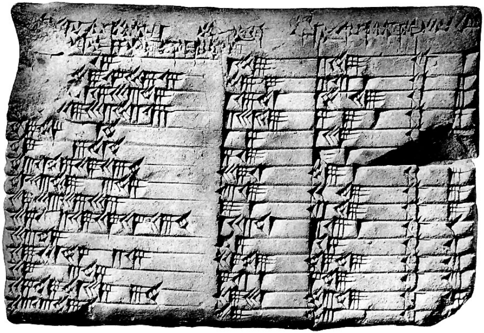
1. 우리의 옛 수학에 대해서
2. 새로이 알려진 우리 역사 속의 수학: 기하학
3. 중국, 역법, 천문, 수학
4. 조선 후기: 홍대용, 유금, 배상열, 홍길주, 이상혁, 남병길, 조희순
5. 조선의 지혜

참고문헌

1. 조선왕조실록 (세종 실록, 세조 실록).
2. 김용운 편, 한국과학기술사자료대계(韓國科學技術史資料大系) 수학편, 려강출판사, 1985. (이 발표 파일에 삽입된 조선 산서의 스캔은 모두 이 책에서 나온 것입니다.)
3. 한국수학사학회지 Journal for History of Mathematics의 여러 논문들.
4. Hong Sung Sa & Kim Young Wook, A Brief History of Korean Mathematics, *Seoul Intelligencer* (*Seoul ICM 2014*), Springer, 2014.
5. 홍성사,『東洋과 朝鮮의 方程式論』, 2014년도 한국수학사학회 NIMS 동서양 수학사 여름학교(2014. 7. 29.～8. 1.), 한국수학사학회 프로시딩 24권 1호 (2014), 국가수리과학연구소 및 한국수학사학회, pp. 3–10.

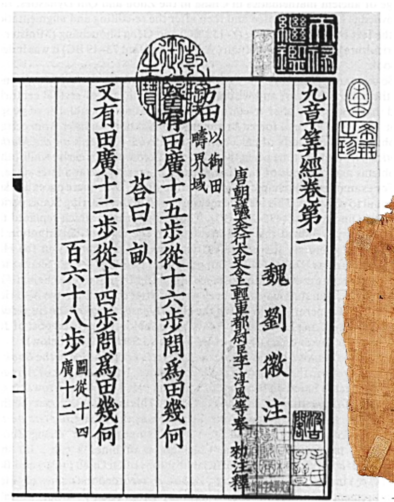
Table of Contents

오래된 수학

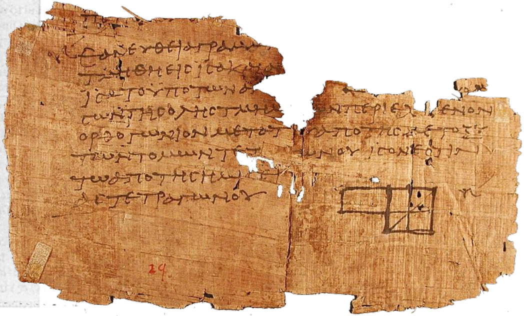


Plimpton 322 점토판. 피타고라스 관계 $a^2 + b^2 = c^2$을 만족시키는 자연수의 쌍이 15개 기록되어 있다.
자료 출처: http://en.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322

동, 서양의 수학



『구장산술』



유클리드의 『원론』

그리스 수학의 특징 (∼3세기)

- 바빌로니아 ⇒ 이집트 ⇒ 그리스
- 60진법
- Arithmetic vs. Logistics
- 수(Numbers)와 선분(Segments): 자연수와 분수
- 논리(아리스토텔레스), 역설 (제논), 증명 (탈레스)
- 기수법 (Decimal Nonposition System)
- 유클리드의 원론
- 탈레스, 피타고라스, 제논, 플라톤, 아리스토텔레스, 유클리드, 히파티아 등.

그리스 숫자

α	β	γ	δ	ϵ	F	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
,α	,β	,γ	,δ	,ϵ	,F	,ζ	,η	,θ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

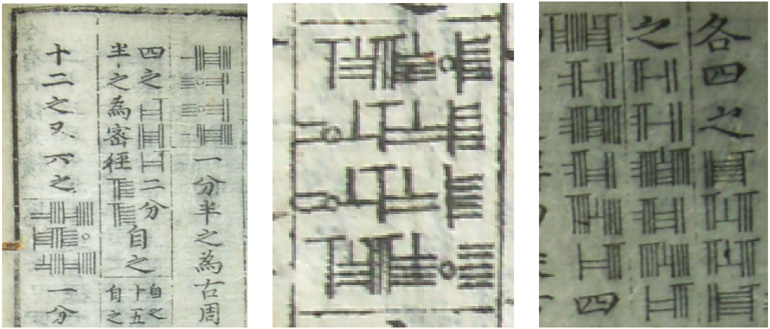
그리스의 숫자는 자릿수 표현을 하지 않는다: $14 = \iota\delta = \delta\iota$ 이다.
$1 \times 2 = \alpha \times \beta = \beta$이지만 $10 \times 2 = \iota \times \beta = \kappa$이고 $1 \times 20 = \alpha \times \kappa = \kappa$, $10 \times 100 = \iota \times \rho = ,\alpha$ 등으로 구구단을 만들 수 없어 보인다.

중국 수학의 특징(~13세기)

- 산가지(籌)와 10진법
- 자연수, 분수, 소수
- 현실적인 문제 + 방정식과 급수 이론
- 숨어 있는 논리, 기호 없음
- 과정이 남지 않는 계산
- 기수법 (Decimal Position System)
- 구장산술九章算術
- 장창, 유휘, 조충지, 이순풍, 가헌, 이야, 양휘, 진구소, 주세걸.

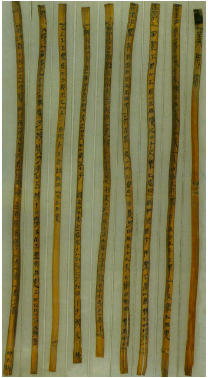
중국의 산가지

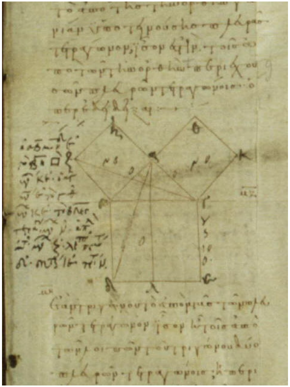
그림 3: 동양에서 사용된 산대 (산가지) 표기법.



산가지를 사용해 숫자를 나타낸 것을 책에 그림으로 그려 넣은 기호.

고대 수학의 비교 (죽간(冊)과 피타고라스 정리)

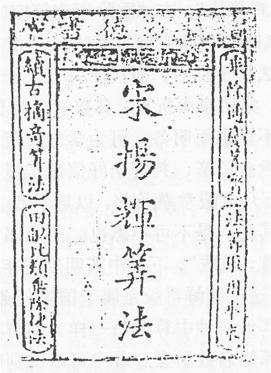




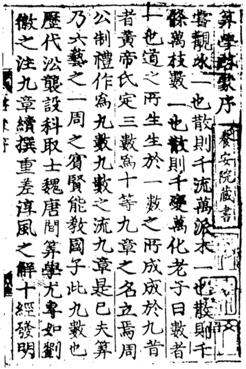
동양 수학의 내용

1. 구장산술의 아홉가지 문제와 그 풀이법
2. 方田과 분수계산, 粟米와 물물교환/환산, 衰分의 비례문제,
3. 小廣의 2차방정식, 商功과 토목공사의 기하, 均輸와 수송문제,
4. 盈不足과 1차방정식, 方程과 연립1차방정식, 勾股의 직각삼각형 기하.

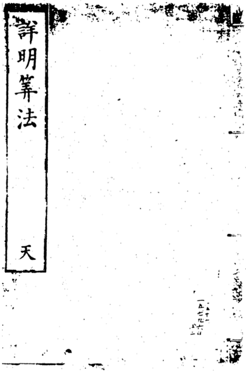
조선에 영향을 미친 중국 산서


宋楊輝算法
續古摘奇算法
田畝比類乘除捷法

양휘산법
(1274)


算學啓蒙序
嘗觀水一也散則千流萬派木一也散則千
條萬枝數一也散則千變萬化老子曰數者
一也道之所生生於一數之所成成於九首
者黃帝氏定三數爲十等九章之名立焉周
公制禮作爲九數九數之流九章是已夫算
乃六藝之一周之賓賢能教國子此九數也
歷代沿襲設科取士魏唐間算學尤尊如劉
徽之注九章續撰重差淳風之解十經發明
養安院藏書

산학계몽
(1299)


詳明算法
天

상명산법
(1373)

Table of Contents

우리 수학: 삼국 시대 및 고려 시대

- 삼국사기의 기록.
- 통일신라 국학(682): 고구려, 백제의 체계, 당나라의 체계.
- 가르친 내용: 철경綴經, 삼개三開, 구장九章, 육장六章.
- 일본에 전해졌다고 보임.
- 고려는 송宋과 정치, 경제, 문화적으로 가까웠으며 매우 많은 책을 수입하고 또 인쇄하였다. (금속활자를 발명할 정도· · ·)
- 10세기 중엽 과거제도에는 수학 관리를 뽑는 시험이 있었다. (명산과)
- 시험 과목은 구장, 철술綴術, 삼개, 사가謝家.
- 국자감(992): 국자학, 대학, 사문학, 율학, 서학, 산학算學

15세기 조선의 산학

조선의 역사 기록은 『조선왕조실록』에서 찾을 수 있다.
『조선왕조실록』은 유네스코 문화유산으로 등록되어 있다. 거기에· · ·

- 세종 대왕(1419～1450)은 스스로 산학계몽을 공부하였다.
- 세종대왕의 업적:
  1. 한글, 2. 칠정산내편(1420～1432～1444), 3. 기타.

  [세조 실록 6년 6월 16일, 1460]
- 세종 대왕은 서울의 경도 및 위도에 맞는 역법曆法을 만들 것을 명하였다. (이는 약 20년이 걸린 대 사업이었으며, 이것이 수학을 대대적으로 공부하게 된 이유라고 보인다.)
- 15세기 초의 산학자들은 10차다항방정식을 다루고 그 근을 구할 수 있었다.
- 구하기 힘든 책이 있어도 임금님이 전력을 다해 책을 구해 주었다.
- 경상도 감사가 양휘산법을 100권 만들어 진상하였다.(1433)

후기 조선의 역사

16～17세기에 외세의 침략으로 전국이 황폐화되었다.

- 임진왜란(1592–1598)과 병자호란(1636–1637).
- 淸나라에서 1645에 반포한 시헌력時憲曆은 예수회 신부 Johann Adam Schall von Bell湯若望이 만들었다.
- 1660년에 조선에서 산학계몽을 다시 인쇄하였다.
- 시헌력을 도입하는데 60년 이상이 걸렸다: 기본 계산이 가능하게 됐다.
- 황폐화된 수학을 다시 정립하는데 오랜 기간이 걸렸다: 적어도 17세기 중반에서 18세기 전반까지.
- 시헌력을 이해하는 데는 훨씬 더 오래걸렸다: 1724년의 율력연원(역상고성, 율려정의, 수리정온)이 만들어진 후에야 그 내용을 이해할 수 있었다.
- 우리 나라에서는 이 내용을 알아내는 데 100년이 넘어 걸렸다.

산학자의 구성

- 양반兩班 산학자와 중인中人 산학자
- 양반의 수학 공부: 數는 육예六禮의 하나.

예(禮)	악(樂)	사(射)	어(御)	서(書)	수(數)
예절	음악	활쏘기	마차몰기	문학	산술

- 15세기 말∼1888년 호조의 산학 관리가 된 사람 명단: 1,626명 (중인)
- 이 밖에 관상감 관리도 많음.
- 양반 수학자 중에는 영의정, 판서가 된 사람도 여럿 있음.

양반 산학자: 관직에 오른 사람

박율(1621∼1668), 임준, 최석정(1646∼1715), 조태구(1660∼1725), 유수석, 남병철(1817∼1863), 남병길(1820∼1869), 조희순(19세기 중반),

양반 산학자: 기타

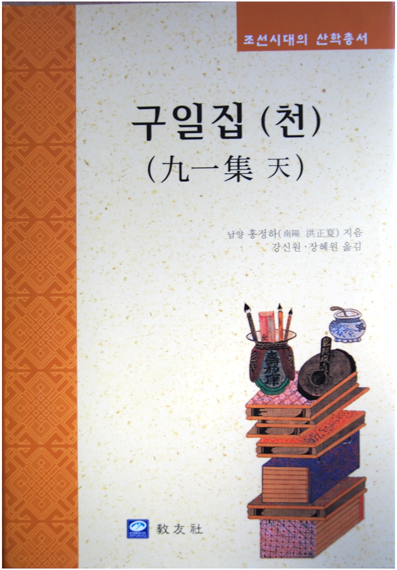
황윤석(1729∼1791), 홍대용(1731∼1791), 홍길주(1786∼1841), 배상열, 안종화, 서명응, 서호수, 서유구, 정약용?

중인 산학자

경선징(1616∼?), 홍정하(1684∼?), 이상혁(1810∼?)

조선의 산서

- 여러 산학자의 저술
- 중인 산학자는 앞의 3인만 저술
- 알려진 산서 가운데 약 40% 번역:
  교우사 『산학총서』 시리즈
- 가장 뛰어난 산서: 홍정하의 『구일집』
- 그렇지만 최근에 19세기의 수학 내용이 알려지며 다른 가능성이 생겼다.



17세기–18세기초의 기하 (홍정하)

구고勾股가 각각 a, b이고 현弦이 c인 직각삼각형에서 $ab = 1080$, $c = a + 27$일 때.

勾는 $\boxed{\begin{matrix}0(太)\\1\end{matrix}}$, 股는 $\boxed{\begin{matrix}1080\\0(太)\end{matrix}}$, 弦은 $\boxed{\begin{matrix}27(太)\\1\end{matrix}}$

이므로 勾股정리에 의해

$$\boxed{\begin{matrix}0(太)\\1\end{matrix}}\text{ 제곱} + \boxed{\begin{matrix}1080\\0(太)\end{matrix}}\text{ 제곱} = \boxed{\begin{matrix}27(太)\\1\end{matrix}}\text{ 제곱.}$$

입니다.

勾는 x, 股는 $\frac{1080}{x}$, 弦은 $x + 27$

Table of Contents

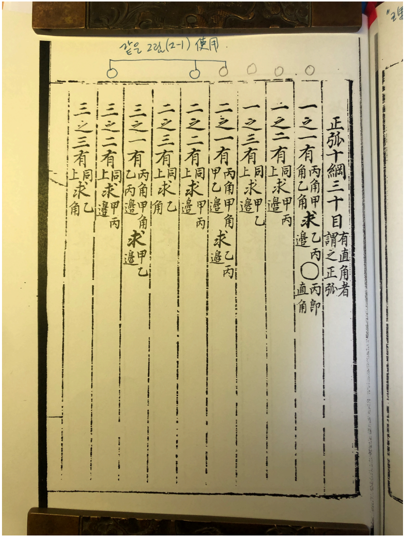
호각연례(弧角演例)

1. 홍길주(洪吉周, 1786～1841)의 문집 항해병함(沆瀣丙函)의 권10
2. 구면삼각형 풀이법을 정리
3. 정호삼각형(正弧三角形) 즉 직각을 한 꼭지각으로 갖는 구면삼각형과 사호삼각형(斜弧三角形) 즉 직각을 끼지 않는 일반적 구면삼각형 두 가지에 대해서 세 각(꼭지각)과 세 변(호각)의 크기 가운데 세 개를 알 때 나머지 세 개를 구하는 방법
4. 『호삼각(弧三角)에서 변각상구(邊角相求)는 기하학자들에게 지극히 어려운 것이며 자세한 것은 역상고성(歷象考成)에 들어있다』
5. 그러나 역상고성의 설명은『정호삼각형에서 단지 7개의 예제를 풀어주었으며 사호삼각형에서는 8개로 합해서 10여개의 예제를 풀어준 것』에 불과하다.
6. 《호각연례》에는 정호 30문제 사호 60문제로 모든 가능한 경우를 다 설명했다.

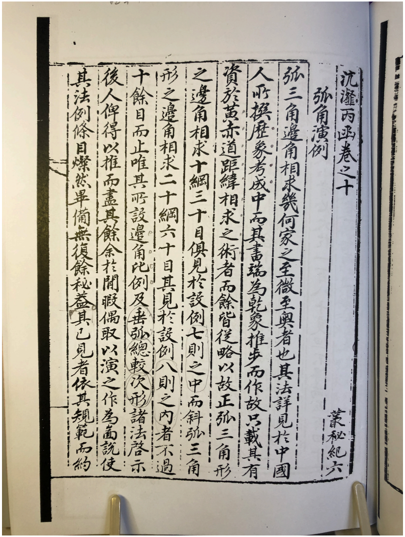
구면삼각법

1. 대체적으로 구면삼각법의 방법은 Napier(1550–1617)의 시기에는 정립되었거나 되어가고 있었다.
2. 「불분선삼률법」즉 Napier's analogy를 만들었다: 홍길주는 사용하지 못했다.
3. 이 공식은 일반 구면삼각형에서 두 변과 그 사이각이 주어지거나 반대로 두 각과 그 사이 변이 주어질 때 이 삼각형을 한 번에 푸는 공식이다.

호각연례


같은 그림(2-1) 使用

正弧十綱三十目 有直角者謂之正弧
一之一有丙角甲角乙角求乙丙邊 ◯ 丙卽直角
一之二有同上求甲丙邊
一之三有同上求甲乙邊
二之一有丙角甲角甲乙邊求乙丙邊
二之二有同上求甲丙邊
二之三有同上求乙角
三之一有丙角甲角乙丙邊求甲乙邊
三之二有同上求甲丙邊
三之三有同上求乙角

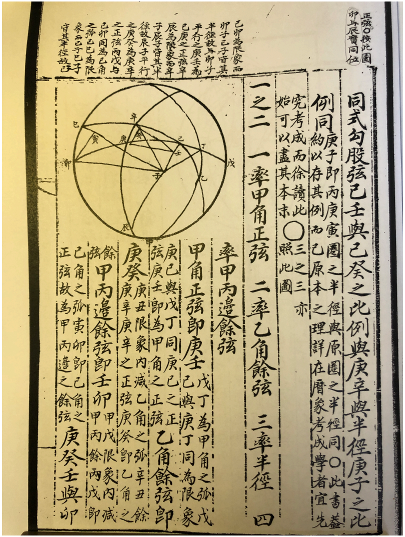

沉潛丙函卷之十

弧角演例

弧三角邊角相求幾何家之至微至奥者也其法詳見於中國人所撰歷象考成中而其書端為乾象推步而作故只載其有資於黃赤道距緯相求之術者而餘皆從略以故正弧三角形之邊角相求十綱三十目俱見於設例七則之中而斜弧三角形之邊角相求二十綱六十目其見於設例八則之內者不過十餘目而止唯其所設邊角比例及垂弧總較次形諸法啓示後人俾得以推而盡其餘余於閒暇偶取以演之作為圖說使其法例條目燦然畢備無復餘秘蓋其已見者依其規範而約

叢秘紀六

정호삼각형 내용



正弦○按此圖卯与辰實同位

己卯為限象而卯子己子皆其半徑故与卯子平行之庚壬為己庚之正弦辛辰為限象而辛子辰子皆其半徑故辰子平行之庚癸為庚辛之正弦丙戊与己卯同為己角之弧己巳為限象而巳子巳子皆其半徑故巳子

同式勾股弦己壬與己癸之比例與庚辛與半徑庚子之比例同庚子即丙庚寅圈之半徑與原圈之半徑同○此書蓋約以存其例而已原本之理詳在曆象考成學者宜先究考成而徐讀此○三之三亦始可以盡其本末○照此圖

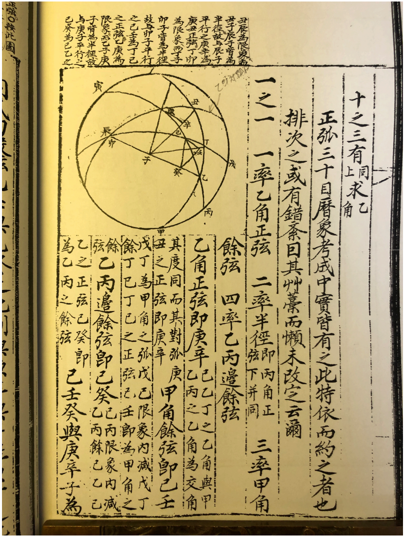
一之二 一率甲角正弦 二率乙角餘弦 三率半徑 四率甲丙邊餘弦

甲角正弦即庚壬戊丁為甲角之弧戊己與庚丁同為限象庚己與戊丁同庚己之正弦庚壬即為甲角之正弦

乙角餘弦即庚癸庚丑限象內減乙角之弧辛丑餘庚辛庚辛之正弦庚癸即乙角之餘弦

甲丙邊餘弦即壬卯甲戊限象內減甲丙餘丙戊即己角之弧寅卯即己角之正弦故為甲丙邊之餘弦

庚癸壬與卯



丑辰為限象而丑子辰子皆為半徑故与辰子平行之庚辛為庚丑正弦丁卯為限象而丁子卯子皆為半徑故与卯子平行之己壬為丁己之正弦乙庚為限象而乙子庚子皆為半徑故与庚子平行之己癸為己乙之

十之三有同上求乙角

正弧三十目曆象考成中實皆有之此特依而約之者也

排次之或有錯案曰其艸藁而懶未改定云爾

一之一 一率乙角正弦 二率半徑即丙角正弦下并同 三率甲角餘弦 四率乙丙邊餘弦

乙角正弦即庚辛己乙丁之乙角與甲乙丙之乙角為交角其度同而其對弧庚丑之正弦即庚辛

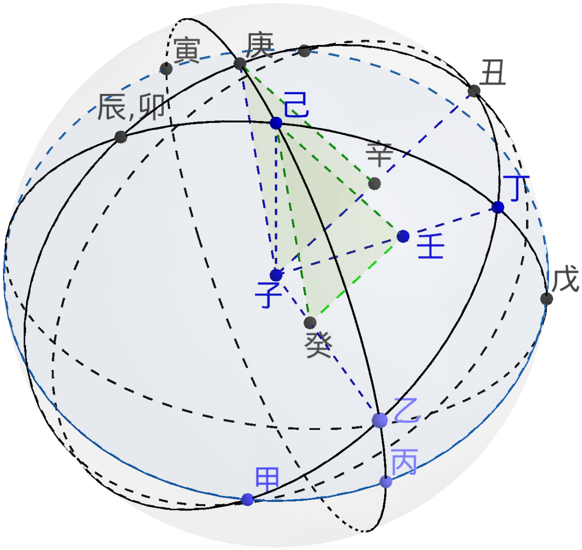
甲角餘弦即己壬戊丁為甲角之弧戊己限象內減戊丁餘丁己丁己之正弦己壬即為甲角之餘弦

乙丙邊餘弦即己癸己丙限象內減乙丙餘乙己乙己之正弦己癸即為乙丙之餘弦

己壬癸與庚辛子為

호각연례의 문제: 정호삼각형 1–1

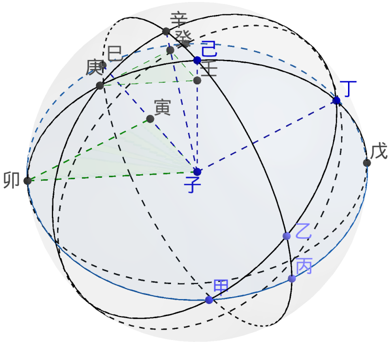
1. 세 각 甲, 乙, 丙(병 각은 직각)이 주어진 정호삼각형에 대해서 변 乙丙(각 甲의 대변)의 길이를 구하는 것
2. 사용한 공식:
$$\sin 甲 : \cos 乙 = 1 : \cos 甲丙.$$
3. $\cos 乙 = \cos 甲丙 \sin 甲$ 즉, $\cos B = \cos b \sin A$
4. 그림으로 이것이 성립하는 이유를 설명했다. (증명)
5. 그림에서 보면 주어진 삼각형 甲乙丙은 적도에 보인다. 여기서 점 甲과 乙을 극점으로 보고 각각 적도(대원)을 그린 것이 나타나있다.
이 그림에서 점 子는 구의 중심점이다. 호 甲丙의 북극이 점 己이다.

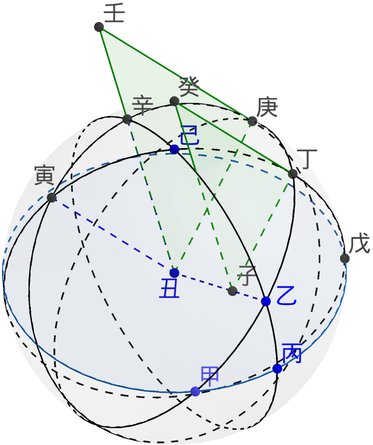

寅
庚
丑
辰,卯
己
辛
丁
壬
子
戊
癸
乙
丙
甲

1. 이제 제1률인 乙각의 정현sine을 보자. 을각은 맞꼭지각으로 보면 △丁乙己의 乙각이기도 하며 이는 점 乙에서 중심 子의 방향으로 들여다보면 ∠庚子丑과 같다. 이제 庚에서 선분 子丑에 내린 수선 庚辛은 (辛각이 직각이므로) 그 길이가 $\sin$ 乙이다. (여기서 구의 반지름은 1로 생각한다.) 그래서 홍길주는 「乙角正弦即庚辛」이라 했고 그 설명을 적었다.
2. 제2율은 丙각의 정현sine이므로 1을 사용한다. 홍길주는 半徑이라 했다.
3. 제3률의 경우도 마찬가지로 「甲角餘弦即己壬」이다. 甲각은 호 戊丁의 중심각과 같고(호각이라 부른다) 따라서 그의 여현cosine은 그의 여각인 호각 丁己의 sine이다. 이것은 점 己에서 선분 子丁에 내린 수선 己壬의 길이와 같다.
4. 제4율은 호각 乙丙의 여현cosine이다. 그는 「乙丙邊餘弦即己癸」라 했다. 乙丙변의 여각은 호각 己乙이 되므로 이의 sine 값은 점 己에서 선분 子乙에 내린 수선 己癸의 길이와 같다.
5. 이제 그림에서 보면 庚辛과 己壬은 각각 호 甲乙丁을 품는 평면에 내린 수선이므로 평행하고 또 이 평면의 모든 방향과 수직이다. 또 庚子, 己癸는 원 丙乙己를 품는 평면 안에서 직선 子乙에 내린 수선들이므로 서로 평행하다. 따라서 삼각형 庚子辛과 己癸壬은 닮은 직각삼각형이어서 대응되는 변의 길이의 비가 같다.

문제 1–2, 1–3

조건은 1–1과 같으며 각각 갑병(甲丙)과 갑을(甲乙)을 구한다

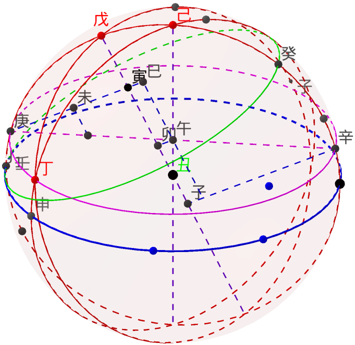


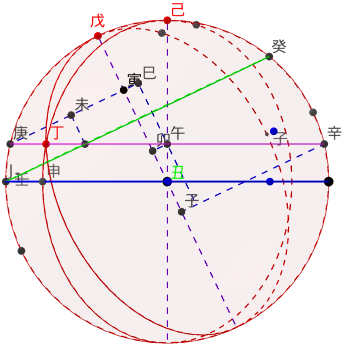


사호삼각형 1–1

일반구면삼각형에서 세 각이 주어졌을 때 그 중 한 변을 구하는 문제이다. 주어진 각은 甲乙丙이고 구하는 변은 甲乙변$(= c)$이다.

1. 홍길주는 삼각형 甲乙丙(本形)의 차형次形을 丁戊己라 하고 그림에는 본형은 나타내지 않고 차형만 그려넣었다.
2. 그 이유는 본형과 차형의 관계 등의 해설이 다음 문제「一之二」에 들어있기 때문이다.
3. 차형의 변 戊己는 甲각과 같고 변 丁戊는 丙각과 같으며 변 丁己는 乙外角과 동일하므로 차형에서 관계식을 만들어 본형의 구하는 변을 계산하였다.


戊
己
癸
子
寅
巳
未
庚
午
卯
辛
丑
壬
丁
申
子


戊
己
癸
寅
巳
未
庚
丁
午
卯
子
辛
丑
壬
申
子

풀이 공식

$$\begin{aligned}
&一率:\ \tfrac{1}{2}\left[餘弦(甲+乙外)+餘弦(-甲+乙外)\right]\\
&二率:\ -正矢(-甲+乙外)+正矢(丙)\\
&三率:\ 1\\
&四率:\ 正矢(甲乙)
\end{aligned}$$

$$\tfrac{1}{2}\left[\cos(A+(\pi-B))+\cos(-A+(\pi-B))\right] : \left[-\mathrm{vers}(-A+(\pi-B))+\mathrm{vers}\, C\right] = 1 : 1-\cos c.$$

1. 『호각연례』의 그림에 나타나 있는 각의 크기를 사용할 경우
2. 위의 비례식을 전개해서 정리하면 구면삼각형에 대한 각의 코사인법칙과 동치이다.

Table of Contents

이상혁의 산술관견

1. 이상혁은 19세기 중엽 동양 산학의 천재
2. 당시 중국을 통해 들어온 서양 수학을 섭렵한 후에 다시 전통 동양수학을 master했다.
3. 《산술관견》의 부록 『불분선삼률법해』에 네이피어의 동류식의 자세한 증명을 실었다.
4. 공식은 폴란드 출신의 예수회 선교사 목니각(穆尼閣, J. N. Smogolenski, 1611 1656)이 쓴 『천보진원(天步眞原)』에 있다.
5. 증명은 그 책의 발문에 간단히 방식만 설명돼 있다.
6. 이상혁은 10개의 그림과 31쪽의 설명으로 이것을 증명했다.

공식

$$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\tan\frac{180^\circ - C}{2},$$

$$\tan\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\tan\frac{180^\circ - C}{2},$$

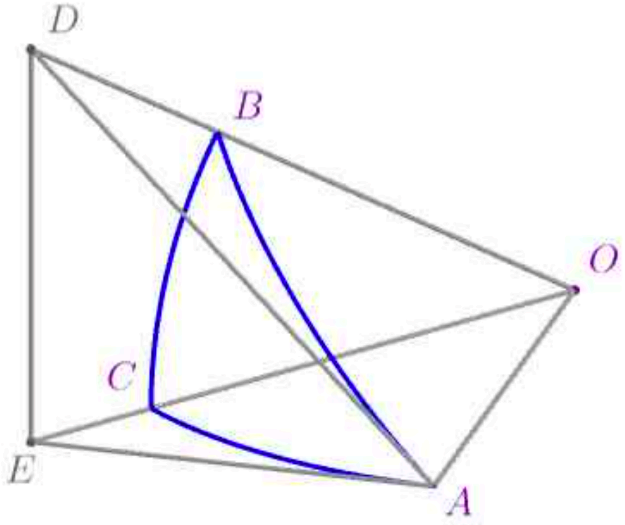
Table of Contents

1. 무관이면서 제주목사를 지냈다
2. 『산학습유』(1870) 저술 (73쪽)
3. 『구고보유(句股補遺)』, 『정호약법(正弧約法)』, 『차형(次形)』, 『사호지귀(斜弧指歸)』, 『호삼각형용대수산(弧三角形用對數算)』, 『팔선상 당(八線相當)』, 『현시첩법(弦矢捷法)』, 『사지산략(四之算略)』
4. 남병길이 이 책의 서문에서 조희순을 극찬했다.

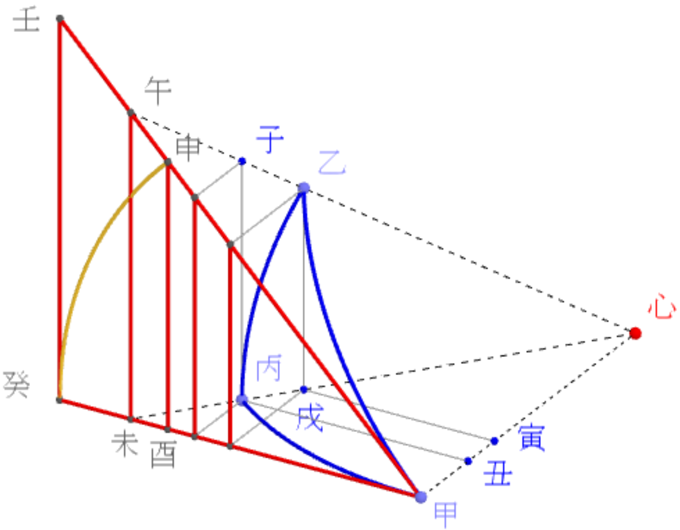
정호약법

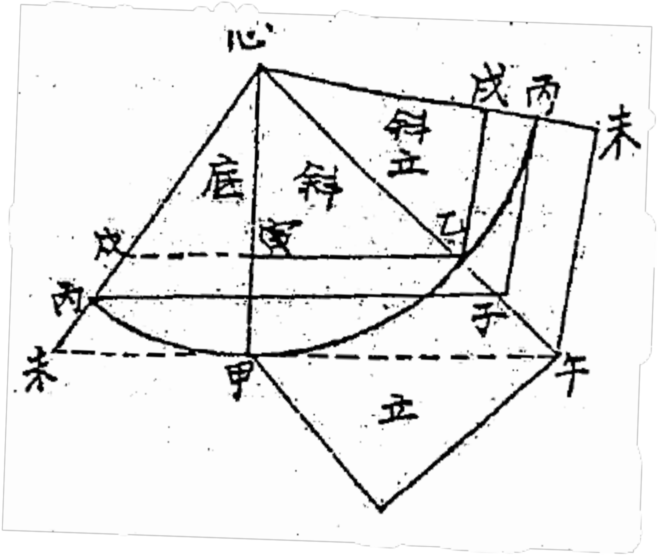
1. 직각 구면삼각형 풀이법
2. 『역상고성』에는 10가지 경우의 30가지 문제를 풀어야 한다고만 적혀 있다.
3. 홍길주는 30가지 경우를 모두 풀었다.
4. 조희순은「역상고성은 번잡함을 없애고 간략히 하여 단지 10 문제에서 30가지를 구하도록 했지만 실은 6 문제를 가지고 16 가지만 구할 수 있다면, (뒤에 설명하는) 3가지 비례식에서 (변과 각을) 서로 바꿔서 비례식을 만들면 나오지 않는 것이 없다」
5. 이 세 가지 비례식은 현재 수학에서 증명하는 방법이다.

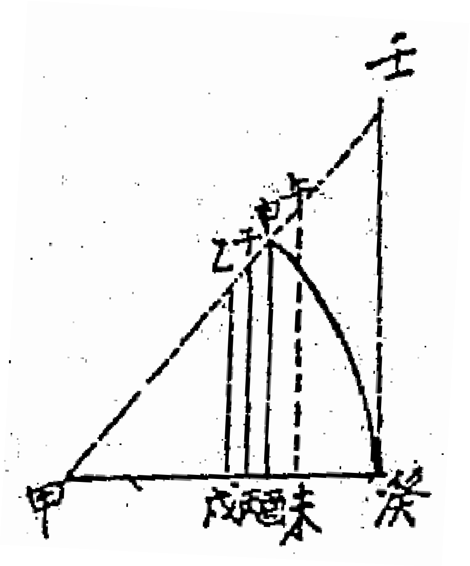
직각삼각형의 각 A의 참도



조희순의 참도



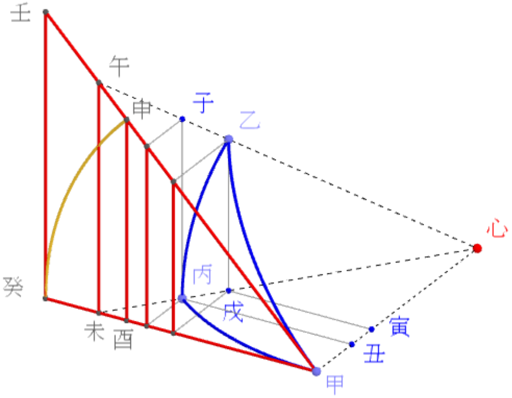

心
丙
未
斜
立
底
斜
丙
子
未
甲
午
立


壬
乙
甲
戊
未
癸

세 가지 기본 공식

각 C가 직각인 삼각형 $\triangle ABC$에서 다음 세 식이 성립한다:

1. $1 : \sin A = \sin c : \sin a$ 甲정현 $=$ 乙戌$/$寅乙
2. $1 : \tan A = \sin b : \tan a$
3. $1 : \cos A = \tan c : \tan b$



$$\text{甲정현} = \frac{\text{乙戊}}{\text{寅乙}} = \frac{\text{乙丙정현}}{\text{甲乙정현}}$$

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

감사합니다