마침내 Poincaré Conjecture가 해결되다 !

양재현 (인하대학교)

지난 8월 22일 스페인의 수도 마드리드에서 개최된 국제수학자총회(간단히, ICM)의 개회식에서 4명의 수학자 Andrei Okounkov[1], Grigory (또는 Grisha) Perelman, Terrence Tao[2], Wendelin Werner[3]가 필즈상을 수상하였다. 9명의 저명한 수학자들로 구성된 필즈상 심사위원회가 약 6개월간 필즈상 수상자 선정 작업에 들어간다. 보통 시상식 3개월 전까지는 최종적으로 수상자가 선정된다. 그러면 국제수학연맹(간단히 IMU)의 회장은 전화로 수상자에게 이 선정사실을 알리고 시상식 전까지는 비밀로 할 것을 약속받는다. 필즈상 심사위원회의 명단도 시상식 전까지는 비밀이다. 올해는 IMU 회장인 John Ball은 6월경에 모든 수상자들에게 전화로 이 사실을 알렸다. 그러나 Perelman은 필즈상의 수상을 거부하여 과학 (특히, 수학)에 관심을 갖고 있는 많은 사람들에게 놀라움을 안겨주었다. 이 뉴스가 유명 일간지인 뉴욕타임즈, 워싱턴포스트 등의 세계 각국의 주요일간지에 대대적으로 보도되어 세계의 관심사가 되었다.(참고문헌 [9, 11, 12, 13, 16]) 지난 5월 말경에 Perelman이 필즈상 수상자로 확정되었다는 후문이 있다. Perelman이 수상을 거부하자 Ball은 6월 말경에 상트 페테스부르크(St. Petersburg) 근교에 살고 있는 그를 찾아가 마드리드에서 개최되는 ICM에서 기조 초청강연(plenary address)을 하여 줄 것을 간곡하게 부탁하였을 뿐만 아니라 수상 거부를 번복하기를 권하였다. 그러나 그는 한마디로 단호하

1) Andrei Okounkov (1969~) : 모스크바에서 출생하여 1995년에 모스크바 국립대학에서 박사학위를 취득하였음. 2004년에 유럽수학회 상을 수상하고 2006년에는 필즈상을 수상함. 현재 프린스턴 대학의 교수임.

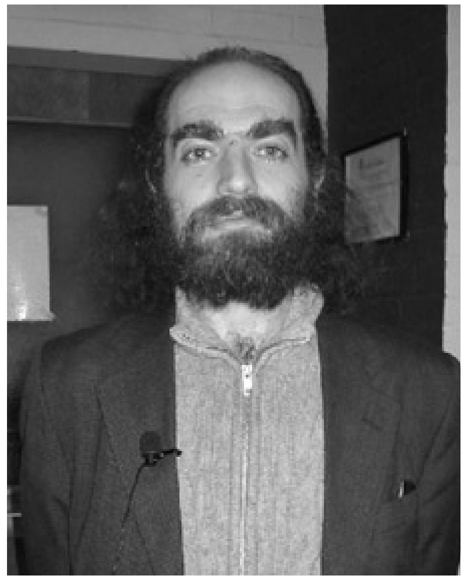
2) Terrence Tao (1975~) : 호주에서 출생하여 1996년에 프린스턴 대학에서 박사학위를 취득하였음. Salem 상, Bochner 상 등의 여러 상을 수상하고 2006년에는 필즈상을 수상함. 현재 UCLA의 교수임.

3) Wendelin Werner (1968~) : 독일에서 출생하였으며 현재 프랑스 국적을 가지고 있음. 1993년에 프랑스 파리 VI 대학에서 박사학위를 취득하였음. 유럽수학회 상, Polya 상 등 여러 상을 수상하고 2006년에는 필즈상을 수상함. 현재 파리 VI 대학의 교수임.

게 거절하였다. 그는 지난 12월에 오랫동안 몸을 닫고 있는 Steklov 수학연구소4)의 교수직을 사퇴하고 이전에 수학교사였던 모친과 단 둘이서 모친의 연금으로 가난하게 살고 있다는 뉴스가 최근에 영국의 모 일간지에 게재되었다.(참고문헌 [9]) 그의 동료들은 하나같이 그는 세속적이지 않은 순수한 사람이며 특히 물질적인 욕심이 없는 사람이라고 한다. 그는 장시간 산보하는 것을 좋아한다고 한다.

Perelman (1966~)은 지난 2003년에 Poincaré conjecture 를 해결하였다는 소문으로 널리 알려진 러시아의 젊은 수학자이다. 잘 아시다시피 이 가설은 1904년에 프랑스 수학자 Henri Poincaré (1854~1912)에 의하여 제기된 전설적인 문제이다. **"단순연결(simply connected)이며 닫힌(closed) n 차원의 다양체는 n 차원의 구와 위상동형 (homeomorphic)이다"**라는 주장이 이 가설의 내용이다. Poincaré 의 사후 2002년까지는 많은 저명한 수학자들이 이 가설을 해결하였다고 주장하였지만 그 후 이들의 주장이 모두 틀렸다는 것이 판명되었다. 1960년대 초반에 5차원 이상인 경우에는 이 가설이 옳다는 사실이 미국 수학자 Stephen Smale에 의하여 증명되었으며, 4 차원인 경우는 1983년에 미국 수학자 Michael Freedman에 의하여 해결되었다. 이 업적으로 Smale 과 Freedman 은 각각 1966년과 1986년에 필즈상을 수상하였다. 일차원인 경우는 간단명료하고 2차원인 경우는 19 세기에 이미 해결되었다. 그래서 3차원 경우가 2002년 전까지는 위상수학 분야의 중요한 미해결 문제로 남아있었다. Perelman이 아래에 소개되는 논문 [Pel1]을 인터넷에 올리기 약 6개월 전에 영국 수학자 Martin Dunwoody가 본인이 Poincaré 가설을 해결하였다고 주장하였다. 뉴욕타임저는 2002년 4월 25일에 "UK Math Wiz May Have Solved Problem"이란 제목으로 이 사실을 보도하였다. 물론 그의 증명이 곧 틀렸다는 사실이 판명되었지만, 뉴욕타임즈가 이 가설을 기사로 취급할

4) Steklov Mathematical Institute : 1924년 레닌그라드(Leningrad)에 러시아 수학자 Vladimir Steklov (1864~1926)의 이름을 따서 설립됨.



정도이었으니 이 가설에 대한 관심이 널리 퍼져 있다는 사실을 알 수 있다. 2000년에 이 가설은 Clay 수학연구소5)(간단히 CMI)의 일곱 개의 밀레니엄 문제 중의 하나가 되었다.

Perelman은 2002년 11월 11일, 2003년 3월 10일과 2003년 7월 17일에 아래의 3편의 논문을 차례로 인터넷에 올렸다.

[Pel1] "The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications". arXiv: math.DG/0211159 (November 11, 2002) [39 pages].

[Pel2] "Ricci flow with surgery on three-manifolds". arXiv:math.DG/0303109 (March 10, 2003) [22 pages].

[Pel3] "Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds". arXiv:math.DG/0307245 (July 17, 2003) [7 pages].

Perelman은 2002년 11월에 논문 [Pel1]을 인

5) Clay Mathematics Institute : 1998년 미국 보스턴의 사업가 Landon T. Clay의 출연금으로 설립되었음. 2000년 5월 24일에 파리에서 이 연구소는 오랫동안 해결되지 않은 중요한 수학문제들 중에서 일곱 문제를 골라서 각 문제에 100만 달러의 상금을 내걸었음.

터넷에 올린 후 즉시 Richard Hamilton, Shing-Tung Yau, Gang Tian, John Morgan 등의 10여 명의 수학자 등에게 논문 [Pel1]의 초록을 전자우편으로 보냈다. 그러나 Yau와 Hamilton 은 회답을 하지 않았다. 그는 1994년 이후로 한 편의 논문도 발표하지 않아서 많은 동료들은 수학을 그만 두었다고 생각하고 있었다. 그런데 갑자기 2002년 11월에 Poincaré 가설의 해결의 실마리를 던지는 논문을 작성하자 많은 수학자들이 그의 연구결과에 지대한 관심을 가지게 되었다. 그래서 그는 MIT, 프린스턴 대학, 콜롬비아 대학, 뉴욕 주립대학에 초청되어 2003년 4월부터 한 달간 그의 연구결과를 강연하였다. 2003년 4월에 프린스턴 대학에서 강연을 하였는데, 이 강연에는 Andrew Wiles, John Nash, Jr., John Conway, John Ball 등의 저명한 수학자들이 참석하였다. 그는 Stony Brook 뉴욕 주립대학에서는 연구결과를 여러 번 강연을 하였는데 Hamilton 교수가 참석하지 않아 낙담하였다고 전해지고 있다. 실은 그는 누구보다도 그의 강연 내용을 잘 이해할 수 있는 Hamilton의 조언과 견해를 들으며 그와 토론하고 싶었기 때문이었다. Morgan 교수가 이 강연에 참석하여 강연을 듣고 크게 감명을 받아 콜롬비아 대학에 초청하였다. 이 초청강연은 토요일 아침에 있었는데 이 대학에 재직하고 있는 Hamilton은 강연이 끝날 무렵에 나타나 강연이 끝난 후 전혀 질문을 하지 않았을 뿐만 아니라 함께 점심을 하면서도 전혀 질문을 하지 않았다고 한다. Anderson과 Milnor 등의 수학자들은 Perelman의 강연을 듣고 그의 연구결과를 긍정적으로 받아 들였던 것 같다.(참고문헌 [1], [4]) Perelman은 미국에서 여러 차례의 강연을 한 후 고향인 상트 페테르스부르크로 돌아가 이때부터 매우 친한 동료 수학자 몇 사람들과만 접촉하고 학문적으로 일체 외부와 연락을 단절하고 은둔생활을 하기 시작하였다.

상기에 언급한 Perelman의 3편의 논문은 Poincaré 가설을 포함하는 Geometrization Conjecture를 해결하였다는 것이다. Geometrization Conjecture는 1982년 필즈상 수학자인 William Thurston 에 의하여 제기된 문제이다.(참고문헌 [6]) 그래서 이 분야에 관심을 가지고 있었던 적지 않은 수학자들이 이 논문을 정독하며 검토하기 시작하였다. 크게 3 그룹이 이 논문의 검증 작업에 들어갔다는 사실이 알려지고 있다. 첫 번째가 Yau, Hamilton 과 Yau의 동료들로 이루어진 그룹이고, 둘째가 Bruce Kleiner와 John Lott 로 이루어진 그룹이며, 마지막으로 Tian과 Morgan 으로 이루어진 그룹이다. 첫 번째 그룹은 2003년 미국 과학재단으로부터 약 100만 달러의 지원을 받으며 연구가 수행되었으며, 나머지 두 그룹은 CMI의 재정적인 지원을 받으며 연구가 수행되었다. 이 그룹들은 Perelman의 연구업적을 기반으로 하여 아래의 논문과 책들을 완성하여 공개하였다.

[C-Z] A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures-application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow, by Huai-Dong Cao and Xi-Ping Zhu, Asian Journal of Mathematics, Vol. 10, No. 2, June 2006, 165-492 [327 pages].

[K-L] Notes on Perelman's Papers, by Bruce Kleiner and John Lott, arXiv.org, May 25, 2006 [192 pages].

[M-T] Ricci Flow and the Poincaré Conjecture, by John Morgan and Gang Tian, arXiv.org, July 25, 2006 [473 pages].

[C-Z]는 올해에 수학저널 Asian Journal of Mathematics (간단히 AJM)에 게재되었고 나머지 2편의 논문은 인터넷에 등재되었다. CMI의 홈페이지에서 상기의 3 편의 논문을 발견할 수 있다. 위에서 보시다시피 기하해석학(geometric analysis)의 분야에서는 적지 않은 중국 수학자들과 미국 수학자들이 선두적인 역할을 하고 있다는 사실을 알 수 있다. 적지만 러시아와 일본의 수학자들도 이 분야에서 중요한 역할을 수행하고 있다는 사실도 알 수 있다.(참고문헌 [5] 참조) Yau의 동료인 Cao와 Zhu 은 Hamilton과 Perelman의 연구결과를 기초로 하여 Yau와 Hamilton의 도움을 받아가며 새로운 방법으로 Poincaré 가설뿐만 아니라 Geometrization Conjecture 를 해결하였다고 주장

하는 논문 [C-Z]를 2005년 12월 12일에 수학저널 AJM 에 투고하였으며 금년 4월 16일에 게재승인을 받아 지난 6월에 출판되었다. 327 쪽이나 되는 긴 논문이 4~5 개월이란 짧은 기간 동안 심사되어 게재승인을 받은 사실에 대해 많은 수학자들이 의구심을 가지고 있다. AJM의 편집위원장인 Yau는 지난 2005년 9월부터 2006년 3월까지 공동저자인 Zhu가 Perelman의 연구결과와 그들의 연구결과에 관하여 하버드 대학에서 매주 3차례 세미나를 하여 왔기 때문에 이 논문을 빠른 시일에 용이하게 심사를 할 수 있었다고 해명하였다. Yau는 올해 4월 13일에 AJM의 31 명의 편집위원들에게 논문 [C-Z]의 사본과 심사위원들의 의견서도 첨부하지도 않고 이 논문의 게재승인에 대한 의견서를 3일 이내에 보내 줄 것을 요구하는 서신을 전자우편으로 보냈다고 한다.(참고문헌 [14]) Cao는 4월 16일에 논문의 게재승인을 전자우편을 통하여 통보받았다. 앞으로 이 일말의 사건이 큰 논쟁거리로 남을 것 같다. 논문 [C-Z]에 대하여 Perelman은 이 논문의 두 저자는 그의 연구에 대하여 제대로 이해하지 못했으며 이 논문에는 새로운 사실이 없다는 부정적인 의견을 피력하였다. Morgan 도 역시 이 논문에 대하여 이와 비슷한 부정적인 의견을 내비쳤다. Yau 그룹은 Kleiner와 Lott의 논문 [K-L]을 정확성이 결여되어 있는 강의록으로 무시하는 분위기이다. [M-T]에 대해서는 공동 저자인 Morgan은 Perelman 의 연구결과를 기반으로 하여 [M-T]에서 Poincaré 가설을 완벽하게 증명하였으며 Geometrization 가설은 다루지 않았다고 공식적으로 여러 기자들에게 말하였다. [M-T]는 심사 과정에 있으며 게재승인이 나면 CMI 에서 책으로 출판될 예정이다. Morgan과 Tian 은 Perelman 과 지난 3여 년 동안 전자우편으로 학문적 접촉을 통하여 [M-T]를 저술하였다.

Yau는 Cao와 Zhu의 논문 [C-Z]를 홍보하기 위해 2006년 6월 20일에 북경 소재의 그의 연구소(Morningside Center of Mathematics)[6]에서 「3차원 다양체의 구조에 관하여(Structures of Three-Manifolds)」의 제목으로 강연하였다.(참고문헌 [7, 8]) 이 강연에서 Hamilton의 업적을 높이 평가하며 강조하였다.

Perelman의 업적을 간략하게 다루겠다. Hamilton은 1982년에 Ricci flow를 창안하여 이를 이용하여 Geometrization Conjecture 를 증명하려고 시도하였다.(참고문헌 [2] 참조) Ricci flow는

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric(g(t))$$

으로 비선형 미분방정식이다. 여기서, t 는 시간 변수, $g(t)$ 는 3차원 다양체 상의 리만 계량(metric)이고 $Ric(g(t))$ 는 $g(t)$ 의 Ricci 곡률이다. 그러므로 Ricci flow는 비선형 열방정식(nonlinear heat equation)이라 간주할 수 있다. 그는 그 후 Ricci flow 에 관한 몇 편의 논문을 발표하면서 이 가설을 증명하기 위해서는 Ricci flow의 특이점들의 구조를 철저하게 분석하여 규명해야하고 Ricci flow의 정칙인 해들을 완전하게 분류해야 한다는 소위 Hamilton's Program을 제창하였다. 여기서, 구간 $[0,\infty)$에서 고르게 유계인(uniformly bounded) 단면곡률을 갖는 Ricci flow의 해를 정칙해(nonsingular solution)라고 하며, 그렇지 않는 단면곡률을 갖는 유한 구간 $[0,T)$에서의 해를 Ricci flow의 특이점(singularity)이라 한다. 이 특이점들을 어떻게 다루느냐가 어려운 문제로 남아있었는데 Perelman이 심오한 통찰력으로 새로운 아이디어를 창안하여 이 난제를 극복하였다. Perelman은 그의 논문 [Pel1]의 3쪽의 상단 1-3 행에서

Thus, the implementation of Hamilton program would imply the geometrization conjecture for closed three-manifolds.

In this paper, we carry out some details of Hamilton program.

6) Morningside Center of Mathematics : 1996년에 중국 과학원과 홍콩 Morningside 주식회사의 기부금으로 Yau의 주도하에 북경에 설립된 수학연구소. 많은 젊은 수학자들이 이 연구소에 참여하고 있음. Yau의 수학연구소라고도 함.

이라 적고 있다. 앞에서 언급한 Perelman의 세 편의 논문은 이 분야의 전문가도 이해하기 힘들 정도로 많은 자세한 내용이 생략되고 아주 압축되어 완성되었다. Yau는 Perelman은 그의 세 편의 논문에서 Poincaré 가설을 상세하고 완벽하게 증명하지 않고 증명을 스케치하고 있다고 주장하고 있다. Yau는 Perelman이 Ricci flow의 특이점을 성공적으로 분류하고 이 점들에서의 Ricci flow의 해를 규명하는 새롭고 훌륭한 아이디어에 대해서는 높이 평가하였지만, 가설의 완벽한 증명은 논문 [C-Z]에서 그의 동료 Cao와 Zhu에 의하여 이루어졌다고 주장하고 있다.(참고문헌 [8, 10]) 그러나 다른 그룹의 수학자들은 이와 다른 의견을 내놓고 있다. 이들은 Perelman이 비록 증명은 자세하게 하지 않았지만 그의 논리과정에는 전혀 결함이 없기 때문에 근본적으로 Geometrization Conjecture 를 해결하였다고 주장하고 있다. Perelman은 이미 언급한 세 편의 논문을 권위있는 수학저널에 투고하지 않았다는 것이 수학계에선 이례적인 사건으로 받아지고 있다. 만약에 그가 전문적인 수학저널에 투고를 하였다면 틀림없이 익명의 논문 심사위원으로부터 상세하지 못한 부분과 결함을 설명하며 다시 논문을 작성하라는 서신을 받았을 것이다. 그러나 그는 센 자존심 때문에 많은 시간을 내어 이 논문을 다시 작성하지 않았을 것이다. 왜냐하면 심사위원의 지시대로 다시 쓴다면 이 논문은 지저분하게 길어 질 수 밖에 없고 그가 원하지 않는 논문의 형태가 될 것이기 때문이다. 그래서 그의 논문들은 게재가 거부되었을 것으로 생각한다.(참고문헌 [3]) 이 분야의 전문가는 아니지만 필자의 느낌은 마침내 Geometrization Conjecture (물론 Poincaré 가설)가 성공적으로 해결되었다는 것이다. 앞으로 2년 후에는 CMI가 상금 100만 달러의 주인을 가려낼 것이다. Perelman과 Hamilton 이 이 상금을 공동으로 나누어 가질 가능성이 크다고 필자는 생각한다. 지금의 사태로 미루어보아 아마도 Perelman이 이 상금의 수상도 거부할 것 같다. CMI의 소장인 James Carlson의 말에 의하면, 만약 그가 이 상금의 수상도 거부하면 이 상금은 러시아 수학발전기금 등의 다른 명목으로 사용될 수 있도록 노력하겠다고 기자회견에서 밝혔다.

Perelman은 1966년 6월 13일 레닌그라드(Leningrad; 상트 페테스부르크의 옛이름)에서 유태계 가정에서 출생하였다. 그의 부친은 전기공학자이고 모친은 수학교사로 근무한 적이 있었다. 그는 어려서부터 수학적 재능을 인정받아 1982년에 러시아 대표팀의 일원으로 국제수학 올림피아드에서 참가하여 만점을 받으며 금메달을 획득하였다. 그 후 레닌그라드 국립 대학교에 입학하여 1980년대 후반에 박사학위를 받았다. 그 후 Steklov 수학연구소의 연구원으로 취직하였으며, 1992년에 Courant 수학연구소에서 6개월, Stony Brook 뉴욕 주립대학에서 6개월 동안 초청되어 연구하였다. 그는 1993년에는 버클리 대학에 Miller Fellow로서 2년간 초청되어 연구하였으며 1994년에는 스위스 취리히에서 개최되었던 ICM에서 초청강연을 하기도 하였다. 1995년에는 스탠포드 대학 등 여러 대학에서 그를 채용하려고 좋은 조건을 제의하였지만 그는 모두 거절하고 상트 페테스부르크로 돌아가 버렸다. 한번은 스탠포드 대학에서 그를 채용하려고 그에게 이력서를 부탁하였는데, 그는 버럭 화를 내며 “If they know my work, they don't need my C.V. If they need my C.V., they don't know my work.” 라고 반박하였다고 한다. 그는 약간 대머리인데다가 머리를 길게 기르고 손톱도 깍지 않고 기르고 있다고 한다. 그는 마치 라스푸틴(Rasputin)[7] 처럼 생겼다고 한다. 그는 지난 12월에 Steklov 수학연구소의 교수직을 사퇴하고 상트 페테스부르크의 외곽에서 모친의 연금으로 모친과 함께 청빈하게 살고 있다고 한다.

이제 필자의 짧은 견해를 피력할까 한다. Perelman은 이미 언급하였다시피 1982년에 국제수학올림피아드에서 만점을 받으며 금메달을 수상하여 어려서부터 수학적 재능을 인정받았으며 1996년에는 유럽수학회에서 수여하는 젊은 수학자상을 거절하였다. 심사위원회들로 구성된 수학자들 중에서 그의 업적을 제대로 평가할 수 있는 사람이

7) Grigori Yefimovich Rasputin (Russian: Григо́рий Ефи́мович Распу́тин; 그리고리 라스푸틴) (1869~1916) : 서부 시베리아 출신으로 로마노프 황실의 총애로 권력 휘두르던 러시아 괴짜 수도사. 1916년에 귀족들에게 피살

없었다는 것이 수상 거부의 이유 중의 하나이다. 이번의 필즈상 수상 거부는 전 세계에 센세이션을 불러 일으켰다. 이번의 수상거부로 그가 오만불손하다는 말도 나오고 있지만, 그의 순수한 마음과 고집적인 자존심에서 이런 행동이 나오지 않았나하는 생각이 든다. 그는 기자와의 인터뷰에서 아래와 같이 말하였다.(참고문헌 [12] 참조)

“I am not a politician ! I'm not going to decide whether to accept the prize of 100 million dollars offered by the Clay Mathematics Institute until it is offered.”

필자는 Perelman의 학문을 이전에 접해 본 적도 그를 직접 만나본 적도 없지만 그를 접해 본 적이 있는 사람과 여러 기사를 통해서 그의 성격과 가치관을 어렴풋이 가늠할 수 있다. 그는 세속, 특히 물질적인 세속에 물들지 않은 매우 순수한 사람이다. 수학분야 뿐만 아니라 창의성을 요구하는 예술, 문학, 과학 등의 여러 분야에서도 순수한 마음을 지닌 사람들이 대체로 위대한 업적을 남기는 것 같다. 특히 명예, 재물을 좇는 세속에 물든 사람들은 자기 분야에서 위대한 업적을 창출할 수 있는 경우가 아주 드물다. 가령, 수학 분야에서 위대한 업적을 내었던 독일의 위대한 수학자 Gauss와 Riemann 은 세속에 물들지 않은 경건하고 순수한 인물이었다. Perelman은 수학이란 학문 그 자체가 좋아 깊은 통찰력과 타의추종을 불허하는 탁월한 창의력으로 100년이라는 긴 역사를 가진 전설적인 난제, 즉, Poincaré 가설을 지난 3여 년 전에 해결하였다. 놀랄만한 사실은 그가 위상수학 분야에서 제기된 위상학적인 난제를 기하학과 해석학 분야에서 쓰이고 있는 도구(tool)와 테크닉을 이용하여 이 가설을 해결하였다는 것이다. 그의 Ricci flow의 특이점을 다루는 연구방법은 이와 유사한 다른 난제를 다루는 데에도 응용될 수 있다는 점에서 그의 최근의 연구업적은 높이 평가받고 있다. 많은 수학자들이 그의 업적이 깊고 아름답다는 찬사를 보낼 뿐만 아니라 그의 큰 업적을 이루어 낸 것은 21세기의 수학사뿐만 아니라 인류 문화사의 측면에서 대사건이라고 이구동성으로 말하고 있다. 또한 그의 업적을 **“인간정신의 승리”**(a triumph of human mind or thought)라고 하기도 한다. 필자는 이 표현이 아주 적절하다고 생각한다. 결론적으로 그는 세계 수학계에 큰 기쁨을 주었고 수학 발전에 지대한 기여를 하였다.

Perelman 은 지난 3년 동안 은둔생활을 하면서 소수의 수학자들과 전자우편을 통하여 학문적으로 교류를 하였던 것으로 짐작할 수 있다. 왜냐하면 일본 수학자 Shioya와 Yamaguchi 의 논문(참고문헌 [5])이 그의 도움으로 2005년 독일 수학저널에 게재되었다. 특히 그는 Morgan 과 Tian 등의 저명한 수학자들과도 전자우편을 통하여 학문적으로 자주 교류하였던 것으로 드러나고 있다. 왜냐하면 논문 [M-T]가 그의 도움으로 작성되었다는 사실을 Morgan 의 ICM 인터뷰에서 짐작할 수 있다. (참고문헌 [15]) 앞으로 적어도 2년 동안은 CMI와 여러 전문가들에 의하여 그의 세 편의 논문 [Pel1-3]이 더욱더 철저하게 검증을 받을 뿐만 아니라 Cao와 Zhu의 논문 [C-Z]도 역시 철저한 검증을 받을 것이다.

신문기사에 의하면 그의 주변에 명예, 재물을 밝히지 않는 비세속적인 사람(그의 가족, 지도교수, 동료 학자 등)들이 많다고 한다. 이로 미루어 보아 그가 유럽수학회 상과 필즈상의 수상을 거부한 사실을 이상하게 받아 드릴 일이 아니라고 생각한다. 가령 러시아의 시인이며 작가인 Boris Pasternak (1890~1960)와 프랑스의 실존주의 철학자인 Jean-Paul Sartre (1905~1980)는 각각 1958년과 1964년에 노벨 문학상의 수상을 거부하였고, 베트남의 외교관이며 정치가인 Le Duc Tho (1911~1990)는 1973년에 노벨 평화상의 수상을 거부하였다. 이들은 명예로운 상에 관심을 가지지 않았던 사람이다. 들리는 소문에 의하면 Perelman은 전에 비해 수학에 대한 열정이 식어 연구 활동을 하지 않고 있다고 한다. 지난 3 여 년 동안의 여러 정황으로 미루어 보아 그는 수학계에 환멸을 느끼고 영원히 수학의 연구 활동을 그만두고 수학분야와 무관한 일을 할 가능성도 배제할 수 없다. 세계 수학계를 위해서는 이런 일이 일어나지 않기를 바랄 뿐이다.

그가 수학계와 인연을 끊는다면 세계 수학계에 큰 손실이 될 것이다. 그와 관련된 여러 주변의 일들이 원만하게 처리되어 그가 즐거운 마음으로 수학계에 돌아와 타의 추종을 불허하는 탁월한 창의력을 발휘하여 다시 한 번 인간정신의 승리를 이루어 주었으면 하는 것이 필자의 간절한 바람이다.

[참고문헌]

[1] Michael Anderson, Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow, Notices of the American Math. Soc., Vol. 2 (2004), 184-93.

[2] Richard S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, Journal of Differential Geometry, Vol. 17 (1982), 695-729.

[3] Ally Jackson, Conjectures No More ? Consensus Forming on the Proof of the Poincaré and geometrization Conjectures, Notices of the American Math. Soc., Vol. 53, No. 8 (2006), 897-901.

[4] John Milnor, Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds, Notices of the American Math. Soc., Vol. 10 (2003), 1226-33.

[5] Takashi Shioya and Takao Yamaguchi, Volume-collapsed three-manifolds with a lower curvature bound, Math. Ann. Vol. 333 (2005), 131-55.

[6] William P. Thurston, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), Vol. 6 (1982), 357-81.

[7] Shing-Tung Yau, Perspectives on geome-tric analysis, ArXiv:math. DG/0602363.

[8] Shing-Tung Yau, Structures of Three-Manifolds, ArXiv:math. DG/0607821.

[9] Lobastova, Nadejda; Hirst, Michael, “World's top maths genius jobless and living with mother”, The Daily Telegraph, August 20, 2006.

[10] “Chinese mathematicians solve global puzzle”, China View (Xinhua), 3 June 2006.

[11] “Fields Medal - Grigory Perelman” (PDF), International Congress of Mathematicians 2006, 22 August 2006.

[12] Overbye, Dennis, “An Elusive Proof and Its Elusive Prover”, New York Times, August 15th, 2006.

[13] “Maths genius declines top prize”, BBC News, 22 August 2006.

[14] Sylvia Nasar and David Gruber, Manifold Destiny : A legendary problem and the battle over who solved it, the New Yorker, August 28th (2006).

[15] ICM Daily News (Madrid, Spain) : August 22th, 23th, 26th (2006).

[16] George Johnson, The Math Was Complex, the Intentions, Strikingly Simple, the New York Times, August 27th (2006).

Perelman의 업적에 관하여[1)]

-Poincaré 가설과 geometrization 가설-

양재현 (인하대학교), 김인강 (서울대학교)

I. Poincaré 가설

Poincaré 가설에 관한 역사는 참고문헌 [17]을 참고하길 바란다. 이제부터는 3차원 다양체인 경우만 다루기로 한다. 3차원 다양체에서의 이 가설은 다음과 같이 기술된다.

Poincaré 가설 : 단순연결(simply connected)이며 닫힌(closed) 3차원 다양체는 3차원 구(sphere) S^3 와 위상동형(homeomorphic)이다. 이것은 또한, 단순연결이며 닫힌 3 차원 다양체는 S^3 와 미분동형(diffeomorphic)[2)]이다라고도 기술할 수 있다.

각주 2)에 의하여 앞으로 다양체는 매끄러운(smooth) 다양체이다. 상기의 가설은 1904년에 Henri Poincaré (1854~1912)에 의하여 제기된 어렵고 중요한 문제이다. 그 후부터 2002년 11월 11일 이전 까지는 이 가설이 미해결인 채로 있었는데, 위의 날짜에 Perelman에 의해 이 가설이 옳다는 사실이 증명되었다. 그는 미국 콜롬비아 교수인 Richard Hamilton(1943~)이 창안한 Ricci flow 방정식의 특이점들을 명확하게 규명함으로써 상기의 가설을 해결하였다. 놀랄만한 사실은 그가 위상수학 분야에서 제기된 위상학적인 난제를 기하학과 해석학 분야에서 쓰이고 있는 도구(tool)와 테크닉을 이용하여 이 가설을 해결하였다는 것이다. 이 가설의 해결은 위상수학이 기하학과 해석학의 분야와 매우 밀접한 관계가 있음을 보여주고 있다.

1976년 Shing-Tung Yau(1949~)는 Kähler 다양체상에서의 Kähler-Einstein 계량(metric)을 구성하여, 이 계량을 이용하여 소위, Severi 가설[3)]을

1) 저자는 9월 초쯤 대한수학회소식지 편집위원회로부터 올해의 Fields Medal 수상자인 러시아 수학자 Grisha Perelman(1966~)의 업적에 관한 글을 청탁받아 본 원고를 쓰게 되었다.

2) Every topological 3-manifold admits a differential structure and every homeomorphism between smooth 3-manifolds can be approximated by a diffeomorphism. Thus, classification results about topological 3-manifolds up to homeomorphism and about smooth 3-manifolds up to diffeomorphism are equivalent.

3) Every complex surface that can be deformed to the complex projective plane is itself the complex projective plane.

증명하였다. 이 가설은 복소기하학 분야에서의 Poincaré 가설이라 간주될 수 있다. 그래서 위상수학과 기하학 분야에서의 난제가 해석학의 어려운 테크닉의 힘으로 해결될 수 있다는 사실이 입증되고 있다.

II. Geometrization 프로그램

위상수학(topology)의 탄생 이후 다양체에 관한 관심이 고조되었고, 이 다양체를 분류하려는 시도가 초기부터 대두되었다. 2차원 다양체는 (방향을 줄 수 있는 다양체에서만 논하면) 2차원의 구(sphere), 토러스(torus)와 종수(genus)가 2 이상인 닫힌 곡면 밖에는 없다. 여기에서 특이할 만한 것은 구 S^2 에는 곡률이 1인 기하구조(spherical geometry)를 줄 수 있고, 토러스에는 곡률이 0 (Euclidean 구조), 그 밖에는 곡률이 -1 인 소위 쌍곡 구조(hyperbolic structure)를 줄 수 있다. 즉 위상구조와 기하구조 사이에는 아주 밀접한 관계가 있는 것이다. 이렇듯 위상다양체를 분류하는데 리만기하를 이용할 수 있다는 발상이 3차원 다양체에 적용된 것이 소위 W. P. Thurston(1946~)의 **geometrization 프로그램**이다. 그는 주어진 3차원 다양체를 조금 더 간단한 조각(또는 성분)들로 나누면, 각각의 조각들이 아주 대칭성이 많은 리만 구조를 가질 것이라 추측하였다. 간단한 조각들로 나눈다는 것은 다음을 의미한다. 우선 3차원 다양체가 **기약** (irreducible)이란 모든 매장된(embedded) 2차원 구가 3차원 ball을 bound 할 때 이다.

Helmut Kneser(1898~1973)는 1929년에 다음의 정리를 얻었다.

Kneser 정리 (1929): 주어진 3차원 다양체 M 을 3차원 ball을 bound 하지 않으며 매장된 2차원 구들을 따라 자르면 유한개의 조각들로 나누어지고 각각의 조각들은 기약이 된다.

도움말 : 3차원 다양체 M 의 상기의 분해의 유일성(uniqueness)은 John Milnor(1931~)에 의하여 증명되었다. 참고문헌 [16]을 참조하기 바란다.

이렇게 잘린 조각들을 그 안의 비압축적 토러스(incompressible torus)를 따라 자르면 최종적으로 잘린 조각들이 대칭성이 많은 아래의 8 개중의 한 가지 기하 구조를 갖는다는 것이 **geometrization 프로그램** 또는 **geometrization 가설** (간단히, GC)이다. 여기서 대칭성이 많은 구조란 국소적으로 등질인(locally homogeneous) 리만구조를 말한다. 즉, 이것은 등질인 계량(homogeneous metric)을 갖는 자연스런 모델(canonical model)공간을 적당한 이산군(discrete group)으로 나누어 만들어 지는 다양체이다. 등질 공간을 이산군으로 나누어 유한 체적의 다양체를 만들 수 있는 Lie 군은 8가지 밖에 없다는 것을 보이기는 그리 어려운 일은 아니 다. 이 8개의 기하 구조를 나열하면

$$S^3,\ E^3,\ H^3,\ S^2\times R,\ H^2\times R,$$
$$Sol,\ Nil,\ \widetilde{PSL}(2,R)$$

이다. 여기서 E^3 는 3차원 유크리드 공간, H^2 는 Poincaré 상반평면, H^3는 곡률이 -1인 Hadamard 3차원 다양체이고, Sol 은 $R^2\times R^*$ 인 가해군(solvable group)으로서 $t\in R^*$가 R^2 상에 (t, t^{-1})로 작용하는 공간 이고, Nil 은 3차원 Heisenberg 군, 즉 대각 성분이 전부 1인 3×3 상삼각(upper triangular) 실행렬들의 집합이다. 그리고 $\widetilde{PSL}(2,R)$ 는 H^2 의 단위 접다발(tangent bundle)의 보편적 덮개(universal cover)이다. Sol, Nil, $\widetilde{PSL}(2,R)$ 상에는 불변 계량(left invariant metric)이 주어져 있음을 유의하기 바란다. 특히 Thurston은 H^3-구조, 즉 쌍곡 구조에 관심을 많이 가지고 Haken hyperbolization 정리[4]를 증명하였다. 3차원 다양체 M 안에 들어 있는 곡면 F 가 **비압축적**(incompressible)이란 기본군 $\pi_1(F)$가 무한군으로 포함사상(inclusion map)에 의해 $\pi_1(M)$안으로 핵(kernel)이 없이 들어 갈 때를 의미한다. 3차원 다양체가 비압축적 곡면을 가지고 경계 이외에는 비압축적 토러스를 갖지 않으면 H^3-구조를 갖는다는 것이다. **그래프 다양체**(graph manifold)란 곡면상의 S^1-다발(circle bundle over surface)인 조각들을 토러스 경계를 따라 붙여서 만든 다양체를 말한다. 이 다양체는 1967년에 Friedhelm Waldhausen 에 의해

4) If M is an irreducible Haken 3-manifold, i.e., M contains an incompressible surface of genus greater than one, then the geometrization conjecture is true for M.

서 소개되어 연구되었다. 참고로 GC는 Poincaré 가설을 도출한다. 왜냐하면 $\pi_1(M)=\{1\}$ 이면 비압축적 토러스가 매장되어 있을 수 없으므로 M 자체가 더 이상 자를 수 없는 조각으로서 8가지 중에서 하나의 구조를 가져야 하는데, $\pi_1(M)$이 유한군이므로 S^3-구조를 가져야하고 또 $\pi_1(M)=\{1\}$ 이므로 S^3와 위상동형일수 밖에 없다. Thurston 의 geometrization 프로그램에 관한 보다 상세한 내용은 참고문헌 [1], [17]과 [23]을 참고하길 바란다.

반면 Hamilton과 Perelman은 S^3의 구조에 많은 관심을 가지고 Ricci 곡률에 의해 만들어진 Ricci flow 를 연구하면서 Poincaré 가설을 해결하기 위해 노력하였다. Thurston의 geometrization 프로그램과 마찬가지로 어떤 다양체에 등질인 계량(homogeneous metric)을 줄 수 있는가를 찾는 것인데, heat flow 에서와 마찬가지로 주어진 다양체 상에 어떤 계량을 주고 Ricci flow를 따라 계량을 흐르게 하면 결국에는 계량이 균일하게 배분되어 등질 계량으로 수렴할 것이라는 착안이었다. 이 예상이 적중하여 마침내 100여 년 간의 미해결 문제였던 Poincaré 가설이 Perelman 에 의해 해결되었다.

III. Hamilton 의 프로그램

닫힌 2차원 공간 N 에서의 Gauss-Bonnet 공식

$$\int_N K\,dA = 2\pi\chi(N)$$

은 N의 가우스 곡률과 위상(topology)과의 깊고 아름다운 관계를 보여 주는 공식이라 할 수 있다. 여기서 K 는 리만 계량 g 의 가우스 곡률이며, dA는 g 의 면적요소이고 $\chi(N)$ 은 N 의 오일러 지표이다. 이 공식을 토대로 하여 미분기하학자들은 고차원의 리만 다양체 M 상에서 자연스런 리만 계량을 발견하여 이의 곡률을 연구함으로써 M 의 위상학적인 성질을 알아내려고 하였다. 다양체 상에 스칼라 곡률이 상수인 리만 계량을 찾는 문제가 소위 Yamabe 문제이다. Ricci 곡률이 상수인 Einstein 계량을 구하려면, 일반적으로 다루기 매우 힘든 Einstein 방정식을 해의 존재성에 관하여 연구해야 한다.

조화사상 heat flow에 관한 Eells 와 Sampson 의 연구(참고문헌 [7])에 영향을 받아서, 1982년 Hamilton 은 스칼라 곡률이 양의 함수이고 단면곡률(sectional curvature)이 양의 상수인 Einstein 계량을 구하기 위해 n 차원 다양체 M 상에 소위 Ricci flow

(1) $$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\,Ric(g(t))$$

를 소개하였다. 여기서, t 는 시간 변수, $g(t)$ 는 3차원 다양체 상의 리만 계량(metric)이고 $Ric(g(t))$ 는 $g(t)$ 의 Ricci 곡률이다. 그러므로 Ricci flow 는 비선형 열방정식(nonlinear heat equation)이라 간주할 수 있다. 리만 곡률 텐서 $\mathrm{R}m$ 을 국소적으로 R_{ijkl} 로 표시하면 Ricci 텐서 (R_{ik}) 는 $R_{ik}=\sum_{j,l=1}^{n} g^{jl}R_{ijkl}$ 이고 스칼라 곡률 $R(x)$ 는 $R=\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}R_{ik}$ 로 주어진다. 여기서 (g^{ij}) 는 계량 텐서 (g_{ij}) 의 역행렬이다. 그러므로 Ricci flow (간단히, RF) (1)은

(1)* $$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2\,R_{ij}$$

으로 나타낼 수 있다. 일반적으로 RF (1)의 해 $g(t)$ 에 대하여 변수 t 에 따라 다양체 $(M, g(t))$ 의 부피는 다르기 때문에 $r=\dfrac{\int R\,dV}{\int dV}$ 이라 놓으면 정규화된 (normalized) Ricci flow (간단히, NRF)

(2) $$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2\,R_{ij} + \frac{2}{n}\,r\,g_{ij}$$

를 얻는다. NRF (2)의 해 $g(t)=(g_{ij}(t))$ 에 대하여 다양체 $(M, g(t))$의 부피는 t 에 무관하게 일정하다.(참고문헌 [2], [24])

Hamilton 은 다음의 정리들을 증명하였다.

정리 1 (Hamilton, [8]; Short-time Existence Theorem). M 이 닫힌 n 차원 다양체이고 초기 계량 조건 $g(0)$ 가 주어져 있다고 하자. 그러면 적당한 양의 실수 T 가 존재하여, 유한 구간 $[0, T)$ 에서 초기치 조건을 만족하는 NRF (2)의

해 $g(t)$ 가 유일하게 존재한다.

정리 2 (Hamilton, [8]; Positive curvature solutions). M 이 닫힌 3 차원 다양체이고 초기 계량 $g(0)$ 가 양의 Ricci 곡률을 가진다고 가정하자. 그러면 구간 $[0, \infty)$ 에서 초기치 조건을 만족하는 NRF (2)의 해 $g(t)$가 유일하게 존재하며, $t \to \infty$ 일 때 계량 $g(t)$는 단면곡률이 양의 상수인 계량 g_∞ 로 지수적으로(exponentially) 빠르게 수렴한다. 특히 M 은 S^3/Γ (구 공간 형; spherical space-form)와 미분동형(diffeomorphic)이다. 여기서 Γ 는 등장사상 $\gamma: S^3 \to S^3$ 으로 이루어진 유한군이다.

정리 2는 보통 Space-form Theorem 으로 알려져 있다.

정리 3 (Hamilton, [12]). M 이 닫힌 3 차원 다양체이라 하고, 모든 $t>0$ 에 대하여 NRF (2)의 해 $g(t)$ 가 존재한다고 가정하자. 그리고 모든 $t>0$ 에 대하여 리만 곡률 텐서 $\mathrm{R}m$ 이 $|\mathrm{R}m(t)| < C$ 의 조건을 만족한다고 가정하자. 여기서 C 는 시간 변수에 무관한 어떤 양의 실수이다. 그러면 M 에 대해 Geometrization Conjecture 가 성립한다. 게다가 $t \to \infty$ 이면 $(M, g(t))$ 는 비압축적 토러스(incompressible torus)를 따라서

$$M = M_{thick} \cup M_{thin}$$

으로 분해된다. $M_{thick} \cap M_{thin}$은 M_{thick}와 M_{thin} 의 공통 경계곡면이며 유한개의 토러스들의 disjoint 합집합이다. 여기서 $(M_{thick}, g(t))$는 부피가 유한인 완전 쌍곡 다양체들의 disjoint 합집합으로 수렴하고, $(M_{thin}, g(t))$는 붕괴한다(collapse). 다시 말하면 $(M_{thin}, g(t))$는 그래프 다양체(graph manifold)이다. 여기서 $|\mathrm{R}m(t)|$ 는 단면곡률의 최대 절대값을 나타낸다.

정리 4 (Hamilton [10]; Curvature pinching estimate). $g(t)$ 가 닫힌 3차원 다양체 M 상의 RF (1)의 해라고 하자. 그러면, $t \to \infty$ 일 때 $\phi(t) \to 0$ 의 성질을 갖는 비증가(non-increasing) 함수 $\phi: (-\infty, \infty) \to R$ 와 $g(0)$ 에만 의존하는 상수 C 가 존재하여

$$\text{(3)} \quad \mathrm{R}m(x,t) \geq -C - \phi(R(x,t)) \cdot |R(x,t)|$$

의 부등식을 얻는다.

정리 4로부터 (x,t) 에서의 $g(t)$ 의 모든 단면곡률 R_{ijkl} 은 부등식 (3)의 우변 값에 의하여 아래에서 유계(bounded below)임을 알 수 있다.

타원 미분방정식과 포물 미분방정식을 연구하는데 Harnack 부등식은 중요한 역할을 한다. 특히 Ricci flow 의 특이점을 분석하여 이해하기 위해서는 Harnack 부등식은 근본적으로 중요한 역할을 하는 도구로써 사용되고 있다. 1993년에 Hamilton은 n 차원 다양체 상의 Ricci flow 에 대한 Harnack 부등식을 증명하였다.

정리 5 (Hamilton, [9]; The Harnack estimate for the RF). M 을 음이 아닌 곡률 작용소를 지닌 n 차원 긴밀인 다양체라고 하자. 그리고 $(M, g(t))$를 M 상의 RF의 해라고 하자. 그러면, 임의의 벡터장 W와 2-form U 에 대하여

$$\text{(4)} \quad M_{ij} W^i W^j + 2P_{ijk} U^{ij} W^k + R_{ijkl} U^{ij} U^{kl} \geq 0$$

의 부등식이 성립한다. 여기서 $\nabla_i = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ 는 $g(t)$의 Levi-Civita 접속의 공변 미분이고 $\Delta = g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ 는 라플라스 연산자이라 하면

$$P_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik}$$

이고

$$M_{ij} = \Delta R_{ij} - \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j R + 2 g^{kp} g^{lq} R_{ikjl} R_{pq} - g^{kl} R_{il} R_{jl} + \frac{1}{2t} R_{ij}$$

이다.

도움말 : B. Chow 와 S.-C. Chu 는 그들의 논문 [4, 5]에서 Harnack 부등식 (4)를 기하학적인 측면에서 분석하였다.

Hamilton 은 다음의 가설을 제기하였다.

가설 6. 임의의 초기 계량 g_0 을 가진 닫힌 3차

원 다양체 (M, g_0) 상의 Ricci flow 에 대하여 Harnack-타잎의 추정(estimate)이 성립한다.

이 가설은 Thurston의 GC 를 해결하는데 매우 중요한 역할을 한다.

일반적으로 닫힌 3 차원 다양체 상에서는 NRF (2)의 해 $g(t)$ 의 곡률 $\mathrm{R}m$ 은 $t \to T$ 일 때 유계이지 않다. 여기서 $[0, T)$ 는 (2)의 해가 존재하기 위한 최대 시간 구간이다. 이러한 해를 (2)의 **특이점**(singularity)이라 한다. 반면에 무한 구간 $[0, \infty)$ 에서 고르게 유계인 (uniformly bounded) 단면곡률을 갖는 RF (1)의 해를 **비특이해**(nonsingular solution)라고 한다.

Thurston 의 GC 를 해결하기 위해, Hamilton 은 RF (1) 을 철저하게 연구하여, 초기 계량 $g(0)$ 가 주어져 있다면, 적절한 기하학적인 surgery 를 수행하여, RF (1)이 기하학적인 구조(geometrical structure)로 발전(또는 진화; evolve)한다는 사실을 증명하려고 시도한 소위 Hamilton의 프로그램을 창안하였다. 보다 구체적으로 설명하면, Hamilton의 프로그램은 3차원 다양체 상의 Ricci flow 의 연구를 아래의 두 연구 [A]와 [B]로 나누어 수행하는 어려운 연구과정이다.

[A] RF (1)의 특이점들을 분석하고, 기하학적인 surgery 를 유한 번 시행하여 비특이해를 구하는 과정.

[B] 무한 구간 $[0, \infty)$ 에서 고르게 유계인 (uniformly bounded) 단면곡률을 갖는 RF (1)의 비특이해들을 분류하는 과정.

IV. Perelman의 업적

이제 간략하게 Perelman의 탁월한 업적을 기술하겠다. 우선 Kneser의 정리에 의하여 일반성을 잃지 않고 3차원 다양체 M 을 기약(irreducible)이라 가정해도 무방하다. 그의 연구는 아래와 같이 다섯 단계로 나누어진다.

단계 1. 특이점 (또는 surgery) 시간 T_i 에서의 NRF 의 특이점들의 형성 (formation)은 표준적(standard)이다: 특이점들이 "캡(cap)" 또는 "목(neck)"의 형태이다.

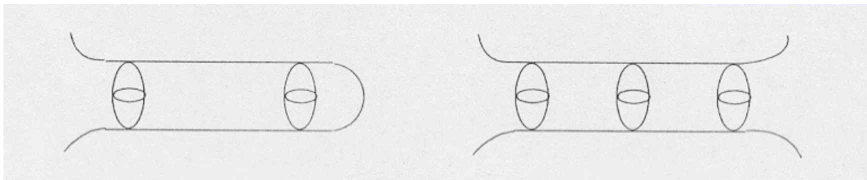


그림 1 : 표준 특이점(standard singularities)

단계 2. surgery 를 시행하라. 즉, 특이점 시간 T_i 의 근처에서 M 으로부터 목(neck) 과 캡(cap)을 잘라 내고, 이것을 유한 곡률을 갖는 구면캡 (spherical cap)으로 대치하여 얻어지는 다양

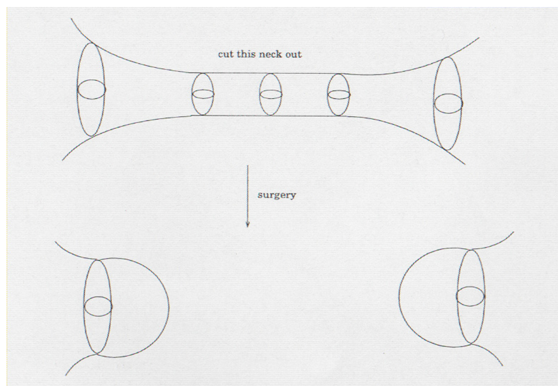


그림 2 : 목(neck; 또는 튜브(tube)) surgery

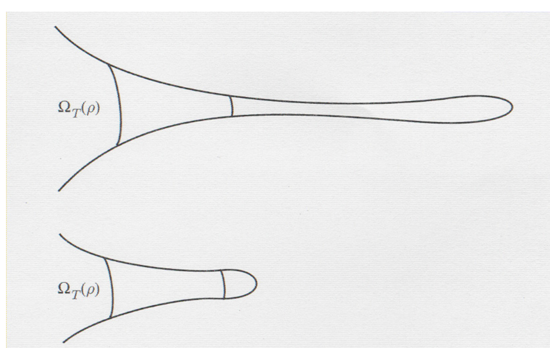


그림 3 : 캡(cap) surgery

체를 M_* 로 표시한다. 그런 후 M_* 에서 단면곡률이 양수인 성분(component)들을 제거하여 새로운 다양체 M^* 를 얻는다. 계속하여 M^* 상에 Ricci flow 를 시행한다.

도움말 : $M^* \neq \emptyset$ 인 경우에는 단면곡률이 양수인 성분을 제거하여도 M 의 위상은 변하지 않는다. $M^* = \emptyset$ 인 경우는 M 상에 단면곡률이 양수인 계량이 존재하므로 M 은 S^3/Γ 와 미분동형이다. $M^* = \emptyset$ 인 경우에는, 유한 번의 surgery를 한 Ricci flow가 유한 시간이 지난 후에 **사멸**(extinct)한다라고 말한다. M^* 가 GC를 만족하면 M 도 GC 를 만족한다.

단계 3. 기껏해야 국소적으로 유한개의 특이점 시간이 존재한다. 유한 시간 구간 $[0, T)$ 에서 많아야 유한 번의 surgery만 하여 Ricci flow를 계속하여 시행할 수 있다.

단계 4. 충분히 큰 시간 $t \gg 0$ 에 대해 비압축적 토러스(incompressible torus)들을 따라서 M^* 는

$$M^* = M_{thick} \cup M_{thin}$$

으로 분해된다. $t \to \infty$ 일 때 M_{thick} 의 성분들은 부피가 유한인 완전 쌍곡 다양체로 수렴하고 M_{thin} 의 성분들은 붕괴한다.

단계 5. M_{thin} 은 그래프 다양체이다.

Perelman은 M 의 특이점들의 구조가 아래와

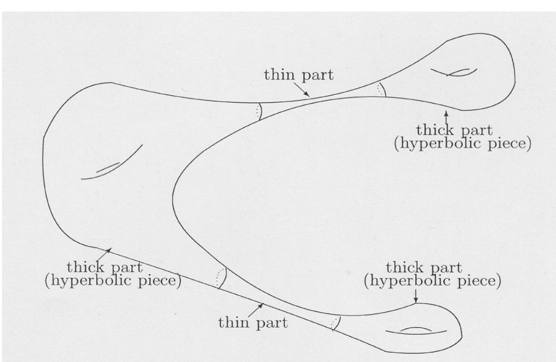


그림 4 : Thick−thin 분해

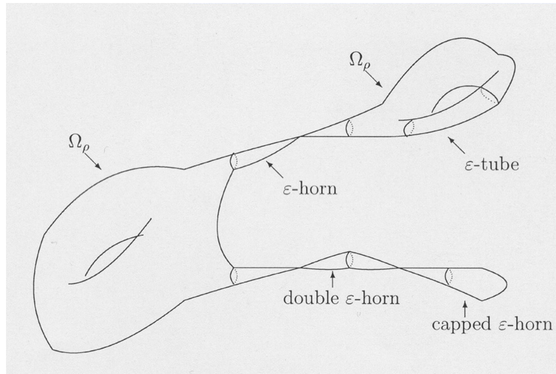


그림 5 : 특이점의 구조

같은 형태라는 사실을 보였다.

그림 4와 그림 5는 각각 Yau의 논문 [25]의 20쪽과 18쪽에 있는 그림을 가져왔다.

Perelman은 그의 논문 [20]에서 $\varepsilon-$neck, $\varepsilon-$cap, $\varepsilon-$tube, $\varepsilon-$circuit, $\varepsilon-$horn, double $\varepsilon-$horn, capped $\varepsilon-$horn 의 개념을 소개하면서 특이점들을 분석하며 연구하였다. 한정된 지면으로 인하여 이들의 개념들의 설명은 생략하겠다. 예를 들면, 그림 5에서 알 수 있듯이 double $\varepsilon-$horn 의 양쪽 끝 부분에서는 스칼라 곡률이 무한대로 접근하며, $\varepsilon-$tube 의 양쪽 끝 부분에서는 스칼라 곡률이 유계이다. 또한 그는 $\varepsilon-$cap과 $\varepsilon-$tube 안에 포함되어 있는 특이점들을 분석하며 연구하기 위해서 S^2를 따라서 행한 surgery 방법(surgery along S^2)을 창안하였다. 한마디로 요약하면 그는 surgery를 지닌 Ricci flow5) 를 철저하고 심도있게 연구하여 GC 를 해결하였다.

Hamilton 은 단계 1을 해결하지 못했다. 반면에 Perelman은 그의 논문 [19]에서 단계 1을 해결하였고, [20]에서 단계 2, 3, 4 를 성공적으로 해결하였다. 그런데 Perelman 은 단계 5에 대해서는 자세하게 설명하지 않았다. 그래서 많은 수학자들이 네 번째 논문을 기다렸지만, 그는 지난 3년 동안 단계 5에 관한 논문을 내놓지 않았다. 그러나 단계 5는 위상학적으로 어렵지 않게 처리될

5) 참고문헌 [11]에서 Hamilton 은 어떤 특별한 곡률을 가지는 4차원 다양체의 위상을 연구하는 과정에서 처음으로 surgery 를 지닌 Ricci flow (즉, Ricci flow with surgery) 를 소개하였다.

수 있다고 위상학자들은 믿고 있다. 실제로 M 의 기본군 $\pi_1(M)$ 이 무한군인 경우는 Takashi Shioya와 Takao Yamaguchi 가 그들의 논문 [22]에서 Perelman 의 도움으로 단계 5를 증명하였다. M 의 기본군 $\pi_1(M)$ 이 유한군인 경우인 경우에, Perelman 은 그의 논문 [21]에서 특이점 시간 $T_1, \cdots, T_n$ 에서 surgery 를 한 후, $t \to T_{n+1}$ 일 때 M^*의 스칼라 곡률이 M^* 상의 모든 점에서 ∞ 으로 blow up 한다는 사실을 주장하였다. 이 경우에는 시간 T_{n+1} 의 근처에서 M^*의 단면곡률은 양수이므로 RF의 해는 $t = T_{n+1}$ 에서 사멸한다. 따라서 $M = S^3/\Gamma$ 이다. 결론적으로 3차원 다양체의 Poincaré 가설을 증명한 것이다. 한편 T. Colding과 W. Minicozzi II 는 그들의 논문 [6]에서 (M, g_0)이 유향이며 닫힌 3차원 다양체로서 aspherical[6] 하지 않다고 하면, 초기치 조건을 만족하는 Ricci flow의 해 $g(t)$는 유한 시간 후에 사멸한다는 사실을 증명하였다.

예를 들어 다음과 같은 방정식을 보자. 반경이 r 인 E^{n+1} 안의 구 S^n 를 생각하면,

$$g_{ij} = r^2 \; \widehat{g}_{ij}$$

이고 Ricci 텐서는 $R_{ij} = (n-1)\ \widehat{g}_{ij}$ 으로 주어진다. 여기서 $\widehat{g}_{ij}$ 는 반지름이 1 인 구 S^n 상의 계량이고, Ricci flow 방정식이

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2(n-1)R_{ij} \quad 즉, \quad \frac{\partial r^2}{\partial t} = -2(n-1)$$

으로 주어진다. $n > 1$ 이면 $[0, T)$ (단, $T = \frac{r^2(0)}{2(n-1)}$)에서 이의 해는

$$g_{ij}(t) = r^2(t)\ \widehat{g}_{ij}(t),$$

$$(\text{단, } r^2(t) = r^2(0) - 2(n-1)t)$$

으로 주어진다. 다시 말하면, 구는 유한시간 내에 점으로 수렴하고 일반적으로 Ricci 텐서가 모든 점에서 양수인 계량에서 출발한 Ricci flow는 점으로 수렴하고, 체적이 1이 되도록 스케일(scale)하면 구로 수렴함을 보일 수 있다.

Perelman의 surgery를 지닌 Ricci flow 에서는 특이점이 발생하는 곳에서 surgery를 하면 (이것은 S^2 를 따라 M 을 조각으로 나누는 과정이다) Ricci flow가 무한대까지 갈 수 있고, 무한대에 접근하면 비압축적 토러스(incompressible torus)를 따라 다양체가 자연스럽게 나누어지는데 쌍곡기하를 갖는 조각 (또는 성분)과 그래프 다양체(graph manifold)로 나누어진다.

Perelman.의 업적에 관한 보다 상세한 내용은 참고문헌 [3, 6, 14, 15, 18, 22, 24, 25]를 참고하길 바란다.

V. 맺음말

앞에서 알 수 있다시피 Perelman은 Hamilton 의 프로그램을 성공적으로 수행하기위해 심오하고 아름다운 기하학적 아이디어를 발견하고 강력한 해석학의 도구를 테크니컬하게 사용하며 GC 를 해결하였다. 한편 Cao와 Zhu는 그들의 논문 [3]에서 Perelman의 방법과 다른 방법으로 GC 를 해결하였다고 주장하고 있다. 앞으로 [3]은 철저하게 전문가들에 의해 검증되어야 한다. 지난 약 4년간 논문 [19, 20, 21]은 적지 않은 뛰어난 수학자들에 의해 오류가 없다는 사실이 엄밀하게 검증되었기 때문에 Perelman이 최종적으로 GC 를 해결하였다고 말할 수 있다. GC가 중요한 난제이기 때문에 적어도 앞으로 2년 동안 Clay 수학연구소와 여러 전문가들에 의해 검증을 받을 것이다.

Perelman의 탁월한 창의력은 세계 수학계의 수준을 한 단계 끌어 올리고 인간정신의 승리를 이루었다. 한정된 짧은 시간 내에 제한된 지면에다 Perelman의 깊고 아름다운 업적을 간략하고 명확하게 소개한다는 것은 저자들에게는 매우 힘든 작업이었음을 밝히고 싶다. 그의 논문을 제대로 이해하지 못한 가운데서 쓴 이 부끄러운 글이 그에게 커다란 누를 끼치지 않을까 두렵다. 흥미로운 문헌 [13]을 독자들에게 일독을 권하면서 이 부끄러운 글을 마무리 한다.

6) $k \geq 2$ 이면 $\pi_k(M) = 0$

[참고문헌]

[1] Michael Anderson, Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow, Notices of the American Math. Soc., Vol. 2 (2004), 184-93.

[2] H.-D. Cao and B. Chow, Recent developments on the Ricci flow, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), vol. 36 (1999), 59-74.

[3] Huai-Dong Cao and Xi-Ping Zhu, A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow, Asian Journal of Mathematics, Vol. 10, No. 2, June 2006, 165-492.

[4] B. Chow and S.-C. Chu, A geometric interpretation of Hamilton's Harnack inequality for the Ricci flow, Math. Res. Let. 2 (1995), 701-718.

[5] B. Chow and S.-C. Chu, A geometric approach to the linear trace Harnack inequality for the Ricci flow, Math. Res. Let. 3 (1996), 549-568.

[6] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi II, Estimates for extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of Perelman, J. Ameri. Math. Soc. 18, no. 3 (2005), 561-569.

[7] J. Eells and J. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.

[8] Richard Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, Journal of Differential Geometry, Vol. 17 (1982), 695-729.

[9] -----, The Harnack estimate for the Ricci flow, Journal of Differential Geometry, Vol. 37 (1993), 225-243.

[10] -----, Formation of singularities in the Ricci flow, Surveys in Differential Geometry, Vol. 2, International Press(1995), 7-136.

[11] -----, Four-manifolds with positive isotropic curvature, Comm. Anal. Geom. 5, No. 1 (1997), 1-92.

[12] -----, Non-singular solutions of the Ricci flow on three-manifolds, Comm. Anal. Geom. 7 (1999), 695-729.

[13] Ally Jackson, Conjectures No More ? Consensus Forming on the Proof of the Poincaré and geometrization Conjectures, Notices of the American Math. Soc., Vol. 53, No. 8 (2006), 897-901.

[14] Michael Kapovich, Geometrization Conjecture and the Ricci Flow, preprint, September 10, 2003.

[15] Bruce Kleiner and John Lott, Notes on Perelman's Papers, arXiv.org, May 25, 2006.

[16] John Milnor, A uniqueness decomposition theorem for 3-manifolds, Amer. J. Math. 84 (1962), 1-7.

[17] ----, Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds, Notices of the American Math. Soc., Vol. 10 (2003), 1226-33.

[18] John Morgan and Gang Tian, Ricci Flow and the Poincaré Conjecture, arXiv.org, July 25, 2006.

[19] Grisha Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv:math.DG/0211159 (November 11, 2002).

[20] -----, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv:math.DG/0303109 (March 10, 2003).

[21] -----, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds". arXiv:math.DG/0307245 (July 17, 2003).

[22] Takashi Shioya and Takao Yamaguchi, Volume-collapsed three-manifolds with a lower curvature bound, Math. Ann. Vol. 333 (2005), 131-55.

[23] William P. Thurston, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), Vol. 6 (1982), 357-81.

[24] S.-T. Yau, Perspectives on geometric analysis, ArXiv:math.DG/0602363 (February 16, 2006).

[25] -----, Structures of Three-Manifolds, ArXiv:math.DG/0607821(August 21, 2006).