리만 가설에 관하여

양재현 / 평산 수학연구소 및 인하대

1. 머리말

소수는 수 중에서 가장 기본이 되는 수이다. 소수로써 거의 모든 수를 설명할 수 있기 때문이다. 오래 전부터 위대한 수학자들은 소수의 신비와 분포에 관하여 연구하여 왔다.

1859년에 리만[1]은 베를린 학술원의 회원으로 선정되었다. 베를린 학술원의 헌장에 의하면, 새로이 선출된 회원은 반드시 최근의 연구업적을 보고하게 되어 있었다. 그래서 리만은 『주어진 수보다 작은 소수의 개수에 관하여 (On the number of primes less than a given magnitude)』의 제목으로 보고서를 학술원에 제출하였다.(참고문헌 [12] 참조) 그는 이 보고서에서 리만 제타함수의 성질들을 열거하고 소위, "리만 가설 (the Riemann Hypothesis)"을 제시하였다.

이미 이 전에 소수의 분포에 관하여 오일러[2], 르장드르[3], 가우스[4] 등의 위대한 수학자에 의하여 연구되었다. 오일러는 소수의 분포를 연구하기 위하여 아래의 제타함수

(1) $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (단, s는 실수)

를 공부하였다. 그는

(2) $\zeta(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}$

의 관계식을 보였다. 여기서 $\prod_{p}$ 는 모든 소수 p 들의 곱을 나타낸다. 관계식 (2)는 「오일러 곱(Euler product)」이라고 불린다. 이 사실로부터 소수의 개수가 무한임을 알 수 있다. x를 주어진 양의 실수라고 하고

1) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826~1866)
2) Leonhard Euler (1707~1783)
3) Adrien Marie Legendre (1752~1833)
4) Carl Friedrich Gauss (1777~1855)

$$\pi(x) := |\{p \in \mathbb{Z}^+ \mid 2 \le p < x, \quad p\text{는 소수}\}|$$

라고 하자. 여기서 $\mathbb{Z}^+$는 모든 자연수들의 집합을 나타내고 $|S|$는 집합 S의 개수를 나타낸다. 오일러는

(3) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

이라는 것을 가설로 제시하였다. 오일러, 르장드르, 가우스와 같은 위대한 수학자들이 (3)을 증명하려고 시도하였지만 실패하였다. 1854년에 체비쉐프[5]는 논문집 『Memoires de l'Academie des Sciences de Saint Petersburg』에서

(4) $$A_1 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < A_2$$

의 등식을 증명하였다. (단, $0.992 < A_1 < 1$ 이고 $1 < A_2 < 1.105$ 임.) 그러나 체비쉐프는 (3)의 극한값이 존재한다는 사실은 증명하지 않았다.

1850년경에 리만은 (1)에서 실수 변수 s 뿐만 아니라 복소수 변수 s 까지 생각하였다. 그는 $\mathrm{Re}\, s > 1$을 만족하는 영역에서 $\zeta(s)$는 해석적 함수이고 해석적 접속(analytic continuation)을 지님을 증명하였다. 게다가 $\zeta(s)$의 함수방정식을 발견하였다. 끝으로 그는

$$0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \zeta(-6) = \cdots = \zeta(-2n) = \cdots \quad (\text{단, } n\text{은 자연수})$$

임을 증명하고

(RH) "$\zeta(s)$의 다른 영점(zero)은 모두 $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$의 선상에 놓여 있다."

라는 사실을 주장하였다. 그러나 리만은 이 주장을 증명하지 않았다. 그의 사후에 제타함수 $\zeta(s)$는 「리만 제타함수(the Riemann zeta function)」라고 불렸고 주장 (RH)는 『리만 가설』이라고 불렸다. 그 후 프랑스 수학자 Jacques Hadamard (1865~1963)와 Charles de la Vallée-Poussin (1866~1962) 등과 같은 유명한 수학자들이 리만 가설을

5) Pafnuti L'vovich Chebyshev (1821~1894)

해결하려고 하였지만 실패하였다. 아직까지도 이 가설은 풀리지 않고 있다. 1941년에 프랑스 수학자 베이유[6)]는 함수체(function field)인 경우에 (RH)를 증명하였고, 1949년에 유한체(finite field) 상에서 정의되는 대수다양체의 제타함수에 대하여 (RH)와 유사한 소위, 『베이유 가설(Weil conjecture)』을 제시하였다.(참고문헌 [16]과 [17] 참조) 그 후, 1974년에 벨기에 수학자 데리네[7)]가 매끄러운 사영다양체(nosingular projective variety)인 경우에 베이유 가설이 옳다는 것을 증명하였다.(참고문헌 [1] 참조) 이 업적과 하지 이론의 업적으로 데리네는 1978년에 수학의 노벨상인 필즈상을 수상하였다. 1980년에 일반적인 다양체(complete variety)인 경우에 베이유 가설이 진실이라는 사실을 증명하였다.(참고문헌 [2] 참조)

리만 가설은 정수론 분야에서 중요한 『소수 정리 (the Prime Number Theorem)』와 아주 밀접한 관계가 있다. 가령, 주장 (3)은 $\zeta(1+it)\neq 0$ (단, $t\neq 0$ 인 실수) 이라는 주장과 동치이다.

본인은 이 강연에서 리만 가설의 내용을 쉽게 설명하고 소수 정리와의 연관성에 관하여 가능하면 쉽게 다루려고 한다. 또, 소수에 관한 여러 문제(가령, 골드바하[8)] 가설, 쌍둥이 소수짝의 문제, Bertrand[9)]의 주장)들을 소개하겠다.

2. 리만 제타함수 $\zeta(s)$

리만 가설의 내용을 어느 정도 이해하기 위해서는 우선,

(ㄱ) 복소수(complex number)의 개념
(ㄴ) 해석적(解析的; analytic or holomorphic) 함수의 개념
(ㄷ) 유리형(meromorphic) 함수의 개념
(ㄹ) 해석적 접속(analytic continuation)의 개념

6) André Weil (1906~1998)
7) Pierre Deligne (1944~)
8) Christian Goldbach (1690~1764)
9) Joseph Louis François Bertrand (1822~1900)

등의 기본적인 여러 개념을 알아야 한다.

상기의 개념을 간략하게 설명하겠습니다. 복소수의 개념은 여러분 모두가 잘 알고 있기 때문에 설명은 생략하겠습니다. 복소함수 $f(z)$ 가 z_0 의 근방에서 극한값 $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 을 가질 때 함수 $f(z)$ 는 z_0 에서 해석적이다라고 한다. 영역(a region) D 의 모든 점에서 복소 함수 $f(z)$ 가 해석적일 때 $f(z)$ 는 D 상에서 해석적이다라고 한다. 그리고 $\frac{f(z)}{g(z)}$ (단, $f(z)$ 와 $g(z)$ 는 해석적 함수이고 $g(z) \neq 0$ 임)의 형태의 함수를 유리형 함수라고 한다. 복소 함수 $f(z)$ 가 z_0 의 근방에서

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{a_1}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

(단, $a_{-m} \neq 0$ 임)의 형태일 때 함수 $f(z)$ 는 z_0 에서 m 계의 극점 ($a\ pole\ of$
$order\ m$)을 갖는다고 한다. 영역 $D(\subset C)$ 에서 정의되는 해석적 함수 $f(z)$ 가 주어져 있다고 하자. D 를 포함하는 영역 $E(\neq D)$ 상에 유리형 함수 $F(z)$ 가 존재하여 D 상에서는 $f(z) = F(z)$ 일 때 함수 $F(z)$ 를 $f(z)$ 의 해석적 접속이라고 한다. 예를 들면, 기하급수로 주어지는 함수

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

는 중심이 원점인 단위원 내부 $D = \{ z \in C \mid |z| < 1 \}$ 에서 정의되는 해석적 함수이다. 그런데 함수 $F(z) = \frac{1}{1-z}$ 는 $E = \{ z \in C \mid z \neq 1 \}$ 상에서 정의되는 해석적 함수이며 D 상에서는 $f(z) = F(z)$ 이다. 그러므로 $F(z) = \frac{1}{1-z}$ 를 $f(z)$ 의 해석적 접속이라 말할 수 있다.

도움말 : (1) 자연대수

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (\text{단},\ 0! = 1)$$

는 무리수이다.

(2) $z = x + iy$ (단, x, y는 실수)가 복소수이고 $a > 0$ 일 때

$$\mathrm{Re}\, z := x \ (\text{즉},\ z\text{의 실수부분}), \qquad \mathrm{Im}\, z := y \ (\text{즉},\ z\text{의 허수부분})$$

$$e^z := e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad a^z := e^{z \ln a}, \qquad |z| := (x^2 + y^2)^{1/2}$$

와 같이 정의한다. 가령, n 이 자연수일 때 $|n^z| = e^{x \ln n} = n^x$ 이다.

(3) $x > 1$ 일 때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 는 수렴한다. 그리고 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

는 발산한다.

(4) $D := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 1 \}$이라 놓으면 D는 domain(open and connected set)이다. 여기서, $\mathbb{C}$ 는 복소수 전체의 집합을 나타내는 복소수 체이다. 제타함수 $\zeta(s)$ 는 D 상에서 절대수렴하며 Weierstrass-M 테스트에 의하여 $\zeta(z)$ 는 해석적 함수이다.

리만은 다음의 정리를 증명하였다.

정리 1. (1) $\zeta(s)$ 는 전 복소평면 상으로 해석적으로 접속이 가능하며 $s = 1$ 에서만 단순 극점(a simple pole)을 지니며 이의 residue는 1 이다.

(2) 리만 제타함수는

$$\text{(F.E.)} \qquad \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

와 같은 함수방정식을 만족한다. 여기서

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (\text{단},\ \mathrm{Re}\, s > 0)$$

으로 정의되며 $\Gamma(s)$ 는 해석적 접속을 지닌다.

(3)

$$0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \cdots = \zeta(-2n) = \cdots \quad (\text{단, } n \text{은 자연수}).$$

머리말에서 언급한 보고서에서 리만은 리만 가설을 제시하였다.

이제, 리만 제타함수의 성질을 열거하겠다.

(R1) $\mathrm{Re}\ s > 1$ 이면 $\zeta(s) \neq 0$ 이다.

(R2) $k \in \mathbb{Z}^+$ 가 자연수일 때

$$\zeta(2k) = (-1)^k \pi^{2k} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}\left(-\frac{B_{2k}}{2k}\right)$$

이다. 여기서 B_k는

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k$$

으로 정의되는 베르누이(Bernoulli) 수이다. 가령,

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \zeta(12) = \frac{691}{638512875}\pi^{12}, \cdots.$$

(R3) $k \in \mathbb{Z}^+$ 가 자연수일 때

$$\zeta(-k) = -\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}B_r$$

이다. 단, $\binom{k+1}{r}$ 는 $k+1$ 개중에서 r 개를 뽑는 경우의 수이다. 즉,

$$\zeta(-2n) = 0, \quad \zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

(R4) $$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1) \qquad (s \to 1)$$

이다. 여기서

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

은 오일러 상수이다.

(R5)

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\frac{s}{12}-\frac{s(s+1)(s+2)}{720}+\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{30240}$$
$$-\cdots\cdots+\frac{B_n}{n!}s(s+1)\cdots(s+n-2).$$

단, $s=0,-1,-2,\cdots,-n+1.$

리만 가설 (RH)는 아직까지도 증명되지 않았다. 리만 가설을 해결하기 위해 노르웨이 수학자 셀버그[10]는 1950년경에 소위, 셀버그 트레이스 공식(trace formula)을 창안해내었다. 이 트레이스 공식은 매우 심오하고 아름다운 이론으로 Lie 군의 표현론, 보형형식론, 수리물리, 미분기하학 등의 분야에 응용되었다. 지난 10여 년 전에는 독일 수학자 데닝어[11]는 코호모로지 접근 방법으로 motivic L-함수의 여러 성질들을 유도하였으며 이의 리만 가설을 해결하려고 시도하였다. 물론, motivic L-함수 또는 motivic 제타함수는 리만 제타함수의 경우를 일반화한 함수이다.

함수 $\mu:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}$ 를 아래와 같이 정의하자. 임의의 $x\in\mathbb{Z}^+$ 에 대하여 $x=p_1p_2\cdots p_k$ (단, p_i들은 소수이며 같을 수가 있다.) 이면

$$\mu(x):=\begin{cases}0 & \text{if } x \text{ is square}\\ 1 & \text{if all } p_i \text{ are distinct and } k \text{ is even}\\ -1 & \text{if all } p_i \text{ are distinct and } k \text{ is odd.}\end{cases}$$

가령, $\mu(12)=\mu(25)=0$, $\mu(6)=1$, $\mu(70)=-1$ 임을 쉽게 알 수 있다.

함수 $M:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}$ 를

10) Alte Selberg (1917~)
11) Christopher Deninger (1959~)

$$M(N) := \sum_{n=1}^{N} \mu(n)$$

으로 정의한다.

정리 2. (RH) is true iff $M(N)$ grows no faster than a constant multiple of $N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ as $N \to \infty$ for any $\varepsilon > 0$.

이 정리는 오래 전에 증명되었다.

T가 양수일 때 $N(T)$를 사각형 $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$, $0 < \mathrm{Im}\, s < T$ 안에 있는 $\zeta(s)$의 영점들의 개수라고 하자. 1905년에 H. von Mangoldt (1854~1925)는

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

와 같은 점근 공식을 얻었다. 그리고 리만 제타함수는

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} e^{bs} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}$$

의 무한곱 관계식을 만족한다. 여기서, b는 상수이고 $\prod_{\rho}$는 $\zeta(s)$의 자명하지 않는 모든 영점들의 곱을 나타낸다.

3. 소수 정리 (the Prime Number Theorem)

소수는 수 중에서 가장 기본이 되는 수이다. 소수의 개수가 무한임을 앞에서 보였다. 이제 소수가 어떻게 분포되어 있는가를 살펴보자.
가령, 9,999,900 과 10,000,000 사이에는

9,999,901 ; 9,999,907 ; 9,999,929 ; 9,999,931 ; 9,999,937 ;
9,999,943 ; 9,999,971 ; 9,999,973 ; 9,999,991

와 같이 9개의 소수가 있다. 그런데 10,000,000 과 10,000,100 사이에 있는 소수는

10,000,019 ; 10,000,079

밖에 없다. 이 예에서 보듯이 소수의 분포에 관하여 무엇이라 말할 수 없는 입장이다. $2^{21,701}-1$ 은 1979년 전까지 알려진 가장 큰 소수이다. 몇 년 전에 이보다 더 큰 소수가 알려졌다는 소식을 들었다.

연습문제 1. $2^{21,701}-1$ 이 소수임을 보여라.

소수 정리 3.

(3)' $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} \log n = 1.$

J. Hadamard, de la Vallée-Poussin, A. Selberg 등의 수학자들에 의하여 상기의 소수 정리가 증명되었다. 이의 증명과정에서 리만 제타함수 $\zeta(s)$ 의 자명하지 않는 영점(zero)들이 모두 y 축과 $x=1$ 직선 사이에 있다는 사실을 사용하고 있다. 그래서 소수 정리는 리만 가설 (RH)와 매우 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다.

또, 우리는

(5) $\pi(n) \sim 1+\cdots+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot\zeta(k+1)} \cdot \frac{(\log n)^k}{k!}$

임을 증명할 수 있다. (5)로부터 소수 정리와 리만 제타함수의 이론과 어느 정도 연관되어 있음을 어렴풋이 알 수 있다.

정리 4. 소수 정리는 $\zeta(1+it)\neq 0$ (단, $t\neq 0$ 인 실수)이라는 주장과 동치이다.

정리 4로부터 소수 정리와 리만 제타함수와는 아주 밀접한 관계가 있음을 재확인할 수 있다. 만약에 리만 가설 (RH)가 진실이라면, 우리는 소수의 분포에 관한 보다 자세하고 구체적인 정보와 지식을 얻을 수 있다.

소수에 관한 흥미로운 여러 문제를 소개하겠다.

문제 1. $4n+1$ (단, n 은 자연수)의 형태의 소수가 무한히 많으냐? 예를 들면,

5, 13, 17, 29, … , 10006721, …

디리클레[12]의 정리. k 와 l 이 서로 소인 자연수라고 하자. 그러면, $kn+l$ (단, n 은 자연수)의 형태의 소수의 개수는 무한이다.

그래서 문제 1은 디리클레의 정리에 의하여 풀린다.

문제 2 (골드바하 가설). **"4 보다 큰 임의의 짝수는 홀수인 두 소수의 합으로 쓸 수 있다."** 라고 골드바하는 주장하였다. 이 주장은 아직까지 해결되지 않았다. 그래서 이 주장은 「골드바하」 가설이라고 불리고 있다. 가령,

$6=3+3,\quad 8=3+5,\quad 10=3+7,\quad 12=5+7,\quad 14=7+7,\quad 16=3+13, \cdots.$

이 가설이 옳다고 하면,

"7보다 큰 임의의 홀수는 홀수인 세 소수의 합이다."

이란 주장이 옳다는 사실을 쉽게 알 수 있다.

문제 3 (쌍둥이 소수 문제).

$\{3,5\}$; $\{5,7\}$; … $\{10016957, 10016959\}$; … ; $\{10^9+7,\ 10^9+9\}$; ·

와 같이 차가 2 인 소수 짝을 「소수 쌍둥이(prime twin)」이라고 한다. 100,000 보다 작은 소수 쌍둥이의 개수는 1224 개이고 1,000,000 보다 작은 소수 쌍둥이의 수는 8164 개이다. 1957년 전 까지 알려진 소수 쌍둥이 중에서 가장 큰 것은 {1000000009649, 1000000009651} 이었다.

12) Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805~1859)

(PTP) **"소수 쌍둥이의 개수는 무한인가 ?"**

(PTP) 문제는 아직까지도 해결되지 않았다. 보다 나아가 아래의 문제를 제기할 수 있다.

(PTP*) **"{ p | 단, p, $p+2$, $p+6$ 은 모두 소수 }의 개수는 무한인가?"**

물론 이 문제도 풀리지 않았다

문제 4. N을 주어져 있는 자연수라고 하자. 아래 형태의 수

$$n^2 - n + p, \qquad 0 \le n \le N, \quad \text{단, } n \text{ 은 자연수}$$

가 모두 소수가 되게 하는 소수 p 가 있느냐 ? 이 문제도 역시 아직까지도 풀리지 않았다.

예. (1) $N = 16$, $p = 17$.

(2) $N = 40$, $p = 41$.

문제 5. $n^2 + 1$ (단, n 은 자연수)의 형태의 소수의 개수는 무한인가 ? 가령,

$$2,\ 5,\ 17,\ 37,\ \cdots,\ 65537,\ \cdots .$$

이 문제의 해답은 아직까지도 모르고 있다.

문제 6. p_n 을 n 번째 소수라고 하자. 집합 { $p_n - p_{n-1}$ | n 은 자연수}의 원소 중에서 가장 큰 값은 ? 또, 아래의 극한값

$$\lim_{n \to \infty} (p_n - p_{n-1}) = \ ?$$

은 무엇일까 ?

문제 7. n 이 자연수라고 하자.

n 과 $2n$ 사이에 소수가 존재하느냐?   이 질문은 Bertrand의 문제로 알려져 왔는데 체비쉐프에 의하여 이 질문이 옳다는 사실이 밝혀졌다.

[참 고 문 헌]

P. Deligne, La conjecture de Weil, I, Publ. Math. IHES, Vol. 43 (1974), 273-307.

P. Deligne, La conjecture de Weil, II, Publ. Math. IHES, Vol. 52 (1980), 137-252.

C. Deninger, On the Γ-factors attached to motives, Invent. Math. vol. 104 (1991), 245-261.

C. Deninger, Local L-factors of motives and regularized determinants, Invent. Math. Vol. 107 (1992), 135-150.

C. Deninger, Evidence for a cohomological approach to analytic number theory, Proc. of European Congress of Mathematicians, Birkhäuser (1994), 491-510.

D. A. Hejhal, The Selberg trace formula and the Riemann zeta function, Duke Math. J. Vol. 43, No. 3 (1976), 441-482.

L. K. Hua, Introduction to Number Theory, Springer-Verlag (1982).

N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer-Verlag (1984).

Y. Manin, Lectures on Zeta Functions and Motives, Lecture Notes (Columbia Univ.), 1991.

M. Monastyrsky, Riemann, topology and physics, Birkhäuser (1987).

Y. Motohashi, Spectral theory of the Riemann zeta function, Cambridge Univ. Press (1997).

B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einen gegebenen Grösse, Gesammelte mathematischen Werke (1859), 145-153 (Dover, 1953).

A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., Vol. 20 (1956), 47-87.

C. L. Siegel, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astromie und Physik 2 (1932), 45-80.

A. Voros, Spectral Functions, Special Functions and the Selberg Trace Formula, Communications Math. Physics, Vol. 111 (1987), 439-465.

A. Weil, On the Riemann Hypotheses in function-fields, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 27 (1941), 345-347.

A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 55 (1949), 497-508.

D. Zagier, Eisenstein series and the Riemann zeta function, Tata Institute for Fundamental Research, Bombay (1979), 275-301.

D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper, Hochschultext, Springer-Verlag (1981).

리만의 생애

리만(Bernhard Riemann)은 1826년 9월 17일 하노버 왕국의 브레제렌쯔(Breselenz)라는 마을에서 목사의 아들로 태어났다. 1846년에 그의 부친의 권유로 괴팅겐 대학의 신학과에 입학하였다가 수학에 관한 열정이 매우 강렬하여 얼마 후 철학과로 전과하였다. 그 당시에 괴팅겐 대학의 철학과에는 천문학자 골드슈미트(Carl Wolfgang Benjamin Goldschmidt, 1807~1851), 수학자 스턴(Moritz Stern, 1807~1894)과 위대한 수학자 가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777~1855)가 재직하고 있었다. 괴팅겐에서 일년을 보낸 후 베를린 대학에 가서 2년간 거기서 연구하였다. 이 당시에 베를린 대학에는 야코비(Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804~1851), 스타인너(Jakob Steiner, 1796~1863), 디리클레(Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805~1859), 아이젠쉬타인(Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823~1852)등의 수학자가 있었다.

리만은 『Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einen veränderlichen complexen Grösse (복소 함수의 일반적인 이론에 관한 기초)』의 논문으로 박사학위를 취득하였고 1853년에는 『On the Representability of a Function by a Trigonometric Series』의 논문을 괴팅겐 대학에 제출하여 Habilitation을 받았다. 1857년에 그의 유명한 논문 『Theorie der Abelschen Functionen (아벨 함수의 이론에 관하여)』이 Crelle 수학저널의 제54호에 게재되었다. 이 논문의 대부분의 내용은 리만이 1851년과 1856년 사이에 연구하여 얻었던 결과들이다. 1859년에 이미 1쪽에서 소개되었던 『On the numbers of primes less than a given magnitude』을 베를린 학술원에 제출하여 베를린 학술원의 정식 회원으로 선정되었다.

1855년에 가우스가 죽자 디리클레가 가우스의 교수직을 승계하였다. 1859년에 숙환으로 디리클레가 죽자 이 교수직을 리만이 계승하여 정교수가 되었다. 리만은 리만 기하학을 창시하였고 복소함수론, 아벨함수론, 소수의 분포 이론, 수리물리학 등의 분야에 뛰어난 업적을 남겼다.

1862년 가을에 심한 독감을 앓은 후 결핵에 걸려 그 후 투병생활을 하였다. 정부의 보조금을 받아 병을 치료하기 위하여 날씨가 좋은 이탈리아에 가서 요양하기도 하였다. 1866년 7

월 20일에 Selasca 라는 조그만 마을에서 그의 짧은 생을 마감하였다. 그의 시신은 이 근처에 있는 Biganzola 라는 마을에 매장되었다. 그의 비석에는 아래와 같이 새겨져 있다.

"Here lies in God Georg Friedrich Bernhard Riemann-Göttingen professor, born in Brezelenz, September 17, 1826, died in Selasca, July 20, 1866. Denen die Gott lieben müssen alle Dinge zum Besten dienen" (To those whom God loves ought all to be successful).