현대 수학의 동향

양 재 현

(인하대학교 교수)

I. 머리말

수학이란 학문은 많은 다른 분야보다도 역사가 길다. 기원전 6~7 세기 전부터 주로 그리스의 철학자와 수학자들에 의하여 수학이란 학문이 정립되었다고 생각한다. 가령, 피타고라스 정리, 유크리드 기하학이 등장하였으며 원주율과 소수의 연구가 나름대로 수행되었다. 그 당시에는 주로 정신적으로나 경제적인 여유가 있는 상류층의 사람들이 모든 학문의 기본이라고 할 수 있는 철학과 수학에 관심을 가지고 학문적 이론을 세워 나갔다. 플라톤 학파가 그 중의 대표적인 예이다.

그리스가 로마 제국의 식민지가 된 이후부터는 수학뿐만 아니라 거의 모든 분야가 암흑기에 접어들게 되었다. 중세기에 와서야 유럽의 사람들이 어두운 시대의 잠에서 깨어나기 시작했다. 갈릴레오, 파스칼, 데카르트 같은 과학자 및 철학자들이 수학에 관심을 가지고 연구하였다. 이전에 수학에 관심을 가진 사람들이 있었지만 체계적으로 연구가 수행되지 못하였다.

17세기에 와서 Bernoulli의 일가족을 중심으로 이루어진 학파와 Newton (1642-1727), Leibniz(1646-1716) 등의 수학자들에 수학이란 학문이 제대로 틀이 잡히면서 연구가 되기 시작하였다. Fermat(1601-1665)는 취미로 연구를 한 비전문적인 수학자도 있었다. 그 후 18세기에는 Leonard Euler(1707-83), Carl Friedrich Gauss(1777-1855), B. Riemann(1826-1866) 등의 위대한 수학자들이 등장하여 현대 수학의 기초를 세웠다. Gauss는 비유크리드 기하학을 포함하여 현대 미분기하학의 기초를 세웠을 뿐만 아니라 수론(number theory)의 연구의 틀을 잡아 주었다. 그리고 Riemann은 리만 기하의 기초를 세웠고 함수의 해석적 접속(analytic continuation)이란 중요한 개념을 소개하였다. 이외에도 Jacobi (1804-1851), Weierstrass(1815-97), Fourier(1768-1830), Dedekind(1831-1916), Gantor(1845-1918) 등의 위대한 수학자들도 훌륭한 업적을 창출하여 수학 발전에 큰 기여를 하였다. 19세기 말엽부터는 이전보다 상대적으로 수학자의 수가 급증하여 독일과 프랑스를 중심으로 수학이 빠른 속도로 발전하였다. 독일에서는 D. Hilbert(1862-1943), 프랑스에서는 H. Poincaré (1854-1912)를 중심으로 하여

수학의 많은 분야의 연구가 수행되었다. 가령, 19세기 말엽에는 Hilbert는 그 당시에 큰 이슈중의 하나인 불변론을 완성하였고 유체론의 기초를 세웠다. 20세기에 와서는 H. Weyl(1885−1955), E. Cartan(1869−1951), C. L. Siegel(1896−1981), T. Takagi(1875−1960), A. Weil(1906−98) 등의 수학자들은 20세기 초반의 수학의 발전에 큰 기여를 하였다.

이 강연의 제목이 『현대 수학의 동향』인데 실제로는 현대 수학의 개념을 뚜렷하게 무엇이라 말하기가 쉽지 않다. 그래서 본인은 최근 20∼30 년 동안 활발하게 연구가 수행되고 있는 중요한 수학 문제를 중심으로 이야기를 풀어 나갈까 합니다. 20세기 중반부터는 소위 Bourbaki 학파들이 1970년 중반까지 세계 수학계를 주도하였다고 할 수 있다. 그들의 연구 방법은 추상적이었고 아주 중요하고 구체적인 수학 문제를 추상적으로 일반화하여 해결하려고 하였다. 20세기 초반의 독일의 괴팅겐 학파와는 다른 연구 방법이었다. 대표적인 Bourbaki 학파의 수학자로는 A. Weil, H. Cartan(1904−2008), A. Grothendieck(1928−), J.−P. Serre(1926−), L. Schwartz(1915−2002) 등이 있다. 이 기간 동안 수학의 많은 분야(특히, 대수기하학, 수론)가 추상적으로 일반화되어 젊은 수학자들이 본질적인 수학 문제에 접근하기 위해서는 적지 않는 시간을 보내며 많은 양의 지식을 습득하여야 하여야만 하였다. 그렇지만 이것을 기초로 하여 함수체 상의 리만 가설과 Mordell 가설(지금은 Faltings 의 정리가 되었지만) 등의 중요한 문제가 해결되었다. 1980년 초반에 와서는 대수기하학의 퇴조가 나타나기 시작하여 대수기하학자들이 수학계에 설 땅을 잃기 시작하였는데 다행히도 1980년 후반에 수리 물리학에서의 끈이론(string theory)과 거울대칭(mirror symmetry)의 이론의 등장으로 다시 일어서기 시작하였다. 왜냐하면 끈이론과 거울대칭의 이론의 연구를 성공적으로 수행하기 위해서는 대수기하학의 많은 지식을 필요로 했기 때문이다. 1960년 말경에는 R. Langlands(1936−)는 소위 Langlands 프로그램을 제시하여 보형형식의 이론과 군표현의 연구에 큰 이정표를 이루었다. 그리고 1994년에는 프린스턴 대학의 교수인 A. Wiles(1953−)가 350여 년 동안 미해결 문제인 페르마 마지막 정리를 해결하였다는 사실을 언급하고 싶다.

지금은 수학에 많은 세부적인 분야가 있는데 이 많은 분야의 최근동향을 설명하기에는 본인에게는 큰 무리이기 때문에 본인의 연구와 관련된 여러 중요한 수학 문제를 중심으로 하여 현대 수학의 동향에 관하여 강연하고자 한다.

II. 새 천년 문제들(Millenium Problems)

지난 2000년 4월에 Clay 수학연구소에서 오랫동안 해결되지 않은 중요한 수학 문제들 중에서 일곱 문제를 골라서 각 문제의 해결에 100만 불의 상금을 내걸어 총 700만 불을 내놓았다. Clay 수학연구소는 1998년 9월에 Landon T. Clay 의 기금으로 미국의 캠브리지에서 설립되었다. Clay는 미국 보스턴 시의 성공한 사업가로서 여러 자선단체나 대학에 많은 금액을 기부한 사업가이다. Harvard 대학의 수학과에 재직중인 J. Arthur 교수의 제안을 받아 Clay 는 자신의 재산을 헌납하여 자기의 이름을 따서 수학연구소를 설립하였다. 이 연구소의 교수진은 J. Arthur, A. Connes(1983년 Fields 상 수상자), A. Wiles(1998년 필즈상 수상자), E. Witten(1990년 필즈상 수상자) 등의 수학자들로서 구성되어 있다. Clay 수학연구소의 개소식은 1999년 5월 10일에 약 450 명의 수학자들이 모인 가운데 MIT에서 열렸다. 설립 원년에는 학술적인 활동이 없었지만 그 다음 해에는 700만 불이나 되는 좇 상금을 내걸고 새 천년 문제(millenium)를 세계 수학계에 제시하였다. 신문, 라디오 방송, TV 등의 메스컴을 통하여 전 세계에 알려 졌다. 이로 인하여 Clay 수학연구소는 하루아침에 전 세계 수학계에 알려 졌다.

일곱 개의 새 천년 문제는 아래와 같다.

[1] P versus NP problem
[2] Hodge conjectures (하지 가설)
[3] Poincaré conjecture (뽀앙카레 가설)
[4] The Riemann Hypothesis (리만 가설)
[5] The Birch−Swinnerton−Dyer conjecture (버어취−스위너톤−다이어 가설)
[6] The Navier−Stokes equation (네이비어−스톡스 미분 방정식)
[7] Yang−Mills equation (양−밀즈 미분 방정식)

본인은 리만 가설, 버어취−스위너톤−다이어 가설, 뽀앙카레 가설을 간략하게 소개하며 설명하겠다.

1. 리만 가설

소수는 수 중에서 가장 기본이 되는 수이다. 소수로써 거의 모든 수를 설명할 수 있기 때문이다. 오래 전부터 위대한 수학자들은 소수의 신비와 분포에 관하여 연구하여 왔다. 1859년에 리만[1])은 베를린 학술원의 회원으로 선정되었다. 베를린 학술원의 헌장에 의하면, 새로이 선출된 회원은 반드시

1) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826∼1866)

최근의 연구업적을 보고하게 되어 있었다. 그래서 리만은 『주어진 수보다 작은 소수의 개수에 관하여 (On the number of primes less than a given magnitude)』의 제목으로 보고서를 학술원에 제출하였다.(참고문헌 (ㄷ) 참조) 그는 이 보고서에서 리만 제타함수의 성질들을 열거하고 소위, "리만 가설 (the Riemann Hypothesis)"을 제시하였다.

이미 이 전에 소수의 분포에 관하여 오일러[2], 르장드르[3], 가우스[4] 등의 위대한 수학자에 의하여 연구되었다. 오일러는 소수의 분포를 연구하기 위하여 아래의 제타함수

(1) $$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\text{단, } s\text{는 실수})$$

를 공부하였다. 그는

(2) $$\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

의 관계식을 보였다. 여기서 $\prod_p$ 는 모든 소수 p 들의 곱을 나타낸다. 관계식 (2)는 「오일러 곱 (Euler product)」이라고 불린다. 이 사실로부터 소수의 개수가 무한임을 알 수 있다. x를 주어진 양의 실수라고 하고

$$\pi(x) := |\{ p \in \mathbb{Z}^+ \mid 2 \le p < x, \quad p\text{는 소수} \}|$$

라고 하자. 여기서 $\mathbb{Z}^+$는 모든 자연수들의 집합을 나타내고 $|S|$ 는 집합 S 의 개수를 나타낸다. 오일러는

(3) $$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

이라는 것을 가설로 제시하였다. 오일러, 르장드르, 가우스와 같은 위대한 수학자들이 (3)을 증명하려고 시도하였지만 실패하였다. 1854년에 체비쉐프[5]는 논문집 『Memoires de l'Academie des Sciences de Saint Petersburg』에서

(4) $$A_1 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < A_2$$

의 등식을 증명하였다. (단, $0.992 < A_1 < 1$ 이고 $1 < A_2 < 1.105$ 임.) 그러나 체비쉐프는 (3)의 극한값이 존재한다는 사실은 증명하지 않았다.

1850년경에 리만은 (1)에서 실수 변수 s 뿐만 아니라 복소수 변수 s 까지 생각하였다. 그는 $\mathrm{Re}\, s > 1$ 을 만족하는 영역에서 $\zeta(s)$ 는 해석적 함수이고 해석적 접속(analytic

2) Leonhard Euler (1707~1783)
3) Adrien Marie Legendre (1752~1833)
4) Carl Friedrich Gauss (1777~1855)
5) Pafnuti L'vovich Chebyshev (1821~1894)

continuation)을 지님을 증명하였다. 게다가 $\zeta(s)$ 의 함수방정식을 발견하였다. 끝으로 그는

$$0=\zeta(-2)=\zeta(-4)=\zeta(-6)=\cdots=\zeta(-2n)=\cdots \quad (\text{단, } n\text{은 자연수})$$

임을 증명하고

(RH) " $\zeta(s)$ 의 다른 영점(zero)은 모두 $\mathrm{Re}\, s=\frac{1}{2}$ 의 선상에 놓여 있다."

라는 사실을 주장하였다. 그러나 리만은 이 주장을 증명하지 않았다. 그의 사후에 제타함수 $\zeta(s)$ 는 「리만 제타함수(the Riemann zeta function)」라고 불렸고 주장 (RH)는 『리만 가설』이라고 불렸다. 그 후 프랑스 수학자 Jacques Hadamard (1865~1963)와 Charles de la Vallée-Poussin (1866~1962) 등과 같은 유명한 수학자들이 리만 가설을 해결하려고 하였지만 실패하였다. 아직까지도 이 가설은 풀리지 않고 있다. 1941년에 프랑스 수학자 베이유[6]는 함수체(function field)인 경우에 (RH)를 증명하였고, 1949년에 유한체(finite field) 상에서 정의되는 대수다양체의 제타함수에 대하여 (RH)와 유사한 소위, 『베이유 가설(Weil conjecture)』을 제시하였다.(참고문헌 [16]과 [17] 참조) 그 후, 1974년에 벨기에 수학자 데리네[7]가 매끄러운 사영다양체(nosingular projective variety)인 경우에 베이유 가설이 옳다는 것을 증명하였다.(참고문헌 (ㄱ) 참조) 이 업적과 하지 이론의 업적으로 데리네는 1978년에 수학의 노벨상인 필즈상을 수상하였다. 1980년에 일반적인 다양체(complete variety)인 경우에 베이유 가설이 진실이라는 사실을 증명하였다.(참고문헌 (ㄴ) 참조)

리만 가설은 정수론 분야에서 중요한 『소수 정리 (the Prime Number Theorem)』와 아주 밀접한 관계가 있다. 가령, 주장 (3)은 $\zeta(1+it)\neq 0$ (단, $t\neq 0$ 인 실수) 이라는 주장과 동치이다.

[참 고 문 헌]

(ㄱ) P. Deligne, La conjecture de Weil, I, Publ. Math. IHES, Vol. 43 (1974), 273-307.

(ㄴ) P. Deligne, La conjecture de Weil, II, Publ. Math. IHES, Vol. 52 (1980), 137-252.

(ㄷ) B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einen gegebenen Grösse Gesammelte mathematischen Werke (1859), 145-153 (Dover, 1953).

(ㄹ) Weil, On the Riemann Hypotheses in function-fields, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 27 (1941), 345-347.

(ㅁ) Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 55 (1949), 497-508.

6) André Weil (1906~1998)
7) Pierre Deligne (1944~)

2. The Birch-Swinnerton-Dyer 가설

타원곡선(elliptic curve)이란 3차 방정식

$$(5) \qquad E : y^2 = x^3 + ax + b \quad (\text{단}, \ a, b \ \text{는 상수}, \ 4a^3 + 27b^2 \neq 0)$$

의 해에 의하여 주어질 수 있는 곡선이다. 이 곡선은 종수(genus)가 1 이며 특이점이 없는 사영곡선 (nonsingular projective curve)이다. 이 곡선에 무한 점 ∞를 첨가하면 이 집합 상에 자연스런 기하학적인 덧셈 연산을 얻을 수 있으며 이 연산에 대하여 이 집합은 군 구조(group structure)를 지니고 무한 점 ∞는 이 군의 단위원소의 역할을 한다. 그래서 타원곡선은 간단한 공간인데다가 기하학적인 군 구조를 지니고 있기 때문에 다른 일반적인 다양체에서 찾아 볼 수 없는 매우 아름다운 성질뿐만 아니라 풍부한 정보를 타원곡선의 이론에서 발견할 수 있다.

타원곡선의 이론은 19세기 경에 Gauss, N. H. Abel(1802-1829), Jacobi 등의 위대한 수학자들에 의해 연구되었던 타원함수 이론에서 나타난다. 이제는 타원곡선의 이론은 현대 수학의 여러 분야 (가령, 수론, 복소 함수론, 대수기하학 등)와 밀접하게 지난 30여 년 동안 세계 수학계에서 각광을 받으면서 심도 있게 연구되어 왔다.

유리수 체 $\mathbb{Q}$ 상에서 정의되는 타원곡선 E 의 L-급수 $L(E,s)$는

$$L(E,s) = \prod_{p \mid \Delta_E} (1 - a_p p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{p \nmid \Delta_E} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

으로 정의된다. 여기서, Δ_E 는 E 의 판별식이고 p 는 소수를 나타낸다. 그리고 소수 p 가 $p|\Delta_E$ 인 경우에, 축소된 곡선(reduced curve) $\overline{E}$ 가 p 에서 첨점(cusp)을 가지면 $a_p = 0$, $\overline{E}$ 가 p 에서 분리 노드(split node)를 가지면 $a_p = 1$, $\overline{E}$가 p 에서 비분리 노드(nonsplit node)를 가지면 $a_p = -1$ 이라 정의하고 소수 p 가 $p \mid \Delta_E$ 인 경우에는

$$(7) \qquad a_p = p + 1 - |\overline{E}(F_p)|$$

이라 정의한다. 그러면 $L(E,s)$ 는 $\mathrm{Re}\ s > \frac{3}{2}$ 인 영역에서 절대 수렴한다. E 의 $L(E,s)$ 는 E 의 국소적인 성질들을 측정하는 함수라고 대충 말할 수 있다. 불행하게도 아직까지 $L(E,s)$ 의 전 복소 평면 $\mathbb{C}$ 상으로 해석적으로 접속이 가능

하다는 사실이 아직 밝혀지지 않았다. $a, b \in \mathbb{Q}$ 일 때 (5)에 의하여 주어지는 타원곡선 E 상의 점들 중에서 이들의 좌표가 모두 유리수인 점들과 무한 점 ∞으로 이루어진 집합을 $E(\mathbb{Q})$로 표기한다. 그러면 $E(\mathbb{Q})$는 타원곡선 E로부터 이어받은 덧셈 연산에 대하여 유한하게 생성되는가환군이 된다는 사실이 1922년에 영국 수학자 L. J. Mordell (1888−1972)에 의하여 증명되었다.

1960년대 초반 경에 영국 수학자 B. Birch (1931−)와 H.P.F. Swinnerton−Dyer (1927−)는 E 의 계수 rank $E(\mathbb{Q})$ 에 관한 가설을 제시하였다.

The Birch−Swinnerton−Dyer 가설. E를 $\mathbb{Q}$사에 정의되는 타원곡선이라 가정하자. 그러면

$$\operatorname{rank} E(\mathbb{Q}) = \operatorname{ord}_{s=1} L(E, s).$$

3. 뽀앙카레 가설

뽀앙카레 가설. 단순 연결이고 닫힌 3차원의 공간은 3차원 구면과 위상동형이다. [A simply connected closed manifold of dimension 3 is homeomorphic to a three−dimensional sphere.]

Generalized Poincaré conjecture. Any homotopy n−sphere is homeomor−phic to an n−dimensional sphere.

III. 비가환 조화해석 이론

지난 50여 년 전부터 지금까지 계속 활발하게 연구되어 오고 있는 중요하고 깊은 분야인 비가환 조화해석(noncommutative harmonic analysis) 이론을 간략하게 소개하겠다. 이 이론은 수론, 군 표현론, 양자역학 등의 여러 분야와 아주 밀접하게 연관되어 있다.

우선 Lie 군의 표현의 개념을 간략하게 설명하겠다. 집합 G 가 군 구조를 지닌 매끄러운 공간으로 아래의 사상

$$G \times G \to G, \qquad (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

이 매끄러울 때 G 를 Lie 군이라 한다. 이제, Lie 군 G 와 복소 Hilbert 공간 $V(\neq 0)$가 주어져 있다고 하자. $GL(V)$를 유계(bounded)이며 가역적인 사상 $f: V \rightarrow V$ 들의 집합이라 하자. 그러면 $GL(V)$는 Lie 군이 된다. 군 동형사상 $\pi: G \rightarrow GL(V)$ 가 매끄러운 사상일 때 사상 π 를 V 상의 Lie 군 G의 표현이라고 한다. V 의 부분 벡터공간 U 가 있어 임의의 원 $g \in G$ 에 대해 $\pi(g)U \subset U$ 인 관계가 성립될 때 U 를 군 표현 π 에 대하여 불변 부분공간이라 한다. 군 표현 π 에 대하여 불변 부분공간이 0 과 V 밖에 없을 경우 표현를 기약이다라고 한다. 두 개의 Lie 군의 표현 (π, V) 와 (ρ, W)가 주어져 있을 π 때 임의의 $g \in G$ 에 대하여 $\rho(g) \circ \Phi = \Phi \circ \pi(g)$ 인 관계식을 성립시키는 유계이며 가역적인 선형사상 $\Phi: V \rightarrow W$ 가 존재하면 두 표현 (π, V) 와 (ρ, W)는 서로 동치이다라고 한다. 복소 Hilbert 공간 V 의 내적이 있어 임의의 $g \in G$ 에 관하여 $\pi(g)$ 가 유니털;일 때, 즉 임의의 $g \in G$ 와 $x, y \in V$ 에 관하여 $(\pi(g)x, \pi(g)y) = (x, y)$ 인 관계가 성립할 때 (π, V) 를 유니터리 표현이라고 한다.

G 를 Lie 군이라 하고 $V = L^2(G)$ 이라 하자. 이 때 $g \in G$ 와 $f \in V$ 에 대하여

$$R(g)f(x) := f(xy), \qquad x \in G$$

로 정의되는 자연스런 군 표현 $R: G \rightarrow GL(V)$ 를 G 의 오른쪽 정칙표현(right regular representation)이라 부른다. 이 표현은 G 의 유니터리 표현이며 일반적으로 기약이 아니다. 그래서 이 표현을 기약인 표현으로 분해하면서 G 의 기약인 유니터리 표현을 구할 수 있다. 이런 측면에서 이 표현은 중요하다. 비가환 조화해석의 이론에서 중요한 문제는 G 의 유니터리 쌍대, 즉 G 의 기약인 유니터리 표현의 집합을 구하는 것이다. 게다가 G 의 유니터리 쌍대 위에 적절한 측도(Plancherel measure)를 구하는 것도 중요한 문제 중의 하나이다. Γ 가 G 의 수적인 부분군(arithmetic subgroup)일 때 공간 $\Gamma \backslash G$ 의 L^2-공간을 기약인 유니터리 표현으로 분해하는 문제는 정수론적인 측면과 트레이스 공식의 이론의 연구에서 매우 중요하다. 이것은 소위 Langlands 프로그램 중의 하나이다.

IV. 끝맺음 말

상기에서 소개한 수학 문제이외에도 많은 중요한 문제들이 연구되고 있다. 예를 들면, Goldbach 가설이 그 중의 하나이다. 이 가설은 「4 보다 큰 임의의 짝수

는 홀수인 두 소수의 합으로 쓸 수 있다」라는 것을 주장하고 있다. 이 주장은 아직까지 해결되지 않았다. 1960년대에는 M. Atiyah(1929-)와 I. M. Singer(1924-)에 의해 소위 Atiyah-Singer Index 이론이 수립되었고 A. Grothendieck(1928-)에 의하여 새로운 형태의 추상적인 대수기하학이 소개되었다. 1970년경에는 S.-T. Yau (1949-)에 의해 이루어진 Calabi 가설의 해결이 미분기하학과 대수기하학의 발전에 큰 기여를 하였다. 1980년대 초반에는 Gerd Faltings(1954-)가 Mordell 가설을 해결하여 정수론의 붐을 일으켰으며 G. Frey와 K. Ribet 등의 모듈러 곡선에 관한 연구로 페르마 마지막 정리의 해결에 실마리를 제공하기도 하였다. 반면에 1980년대에는 대수기하학의 분야가 침체기에 빠졌으나 1980년대 후반에 수리 물리학에서의 끈 이론과 거울 대칭 이론의 출현으로 인하여 대수기하학자들의 연구활동이 활성화되었다. 1990년대에 와서는 20세기의 수학계에 큰 업적이 이루어졌으니 다름이 아닌 350여 년 동안 풀리지 않았던 페르마 마지막 정리가 A. Wiles(1953-)에 의하여 증명되었으며 이와 관련하여 Taniyama 가설도 수년 후에 해결되었다. 그리고 Langlands 프로그램 중의 하나가 M. Harris 와 R. Taylor 에 의하여 해결되었다.

Clay 수학연구소에서 제시한 7개의 새 천년 문제는 본질적으로 고전적인 문제인 동시에 깊이가 있는 중요한 문제이다. 21세기에는 이런 고전적이고 깊이 있는 문제들을 연구하며 수학을 발전하여 나갈 것으로 믿는다.