소수의 아름다움

양 재 현 (인하대학교)

자연수가 인간의 실생활에서 중요하다는 사실을 누구나 인정할 것이다. 그러면 우리 인간은 자연수의 성질을 알아야 할 필요가 있다. 자연수는 소수들의 곱으로 나타낼 수 있다는 사실을 쉽게 알 수 있다. 여기서 **소수란 약수가 1과 자기 자신뿐인 수**이다. 예를 들면, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … 은 소수이며 2는 짝수인 유일한 소수이다. 자연수를 이해하기 위해서는 소수를 철저하게 이해해야 한다. 따라서 소수가 수의 기본이 된다는 사실을 인정할 것이다.

오늘의 강연은 소수의 아름다움, 심오함과 신비성을 잘 설명하고 있는 **리만가설**(Riemann Hypothesis)**과 골드바하 가설**(Goldbach Conjecture)에 관한 이야기와 이와 관련된 여러 흥미로운 문제들을 소개한다.

먼저 리만가설에 관한 역사적인 배경과 내용에 관하여 간략하게 설명하겠다.
오래 전부터 위대한 수학자들은 소수의 신비와 분포에 관하여 연구하여 왔다.
1859년에 리만[1)]은 베를린 학술원의 회원으로 선정되었다. 베를린 학술원의 헌장에 의하면, 새로이 선출된 회원은 반드시 최근의 연구업적을 보고하게 되어 있었다. 그래서 리만은 『주어진 수보다 작은 소수의 개수에 관하여 (On the number of primes less than a given magnitude)』의 제목으로 보고서를 학술원에 제출하였다.(참고문헌 [16] 참조) 그는 이 보고서에서 리만 제타함수의 성질들을 열거하고 소위, "리만 가설"을 제시하였다.

이미 이 전에 소수의 분포에 관하여 오일러[2)], 르장드르[3)], 가우스[4)] 등의 위대한 수학자에 의하여 연구되었다. 오일러는 소수의 분포를 연구하기 위하여 아래의 제타함수

(1) $$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (\text{단, } s \text{ 는 실수})$$

1) Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826~1866) : 리만의 일생과 업적에 관해 참고문헌 [14]을 참고할 것.
2) Leonhard Euler (1707~1783) : 스위스 수학자. 금년에 탄생 300주년을 맞이하여 스위스와 러시아에서 많은 국제학술회의 및 여러 행사가 거행되었음.
3) Adrien Marie Legendre (1752~1833) : 프랑스 수학자.
4) Carl Friedrich Gauss (1777~1855) : 위대한 독일 수학자.

를 공부하였다. 그는

$$(2) \qquad \zeta(s) = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$$

의 관계식을 보였다. 여기서 $\prod_p$ 는 모든 소수 p 들의 무한곱을 나타낸다. 관계식 (2)는 「오일러 곱(Euler product)」이라고 불린다. 이 사실로부터 소수의 개수가 무한임을 알 수 있다. x 를 주어진 양의 실수라고 하고

$$\pi(x) := |\{\mathrm{p} \in \mathbb{Z}^+ \mid 2 \le \mathrm{p} < \mathrm{x},\ \ \mathrm{p}\text{는 소수}\}|$$

라고 하자. 여기서 $\mathbb{Z}^+$는 모든 자연수들의 집합을 나타내고 $|S|$는 집합 S의 개수를 나타낸다. 가우스는

$$(3) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

일 것이라는 추측을 제시하였다. 르장드르, 가우스와 같은 위대한 수학자들이 (3)을 증명하려고 시도하였지만 실패하였다. 1854년에 체비쉐프[5]는 논문집 『Memoires de l'Academie des Sciences de Saint Petersburg』에서

$$(4) \qquad A_1 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < A_2$$

의 등식을 증명하였다. (단, $0.992 < A_1 < 1$ 이고 $1 < A_2 < 1.105$ 임.)

1850년경에 리만은 (1)에서 실수 변수 s 뿐만 아니라 복소수 변수 s 까지 생각하였다. 그는 $\mathrm{Re}\, s > 1$을 만족하는 영역에서 $\zeta(s)$ 는 해석적 함수이고 해석적 접속(analytic continuation)을 지님을 증명하였다. 게다가 논문 [16]에서 그는 $\zeta(s)$의 함수방정식을 발견하였을 뿐만 아니라

5) Pafnuti L'vovich Chebyshev (1821~1894) : 러시아 수학자.

$$0=\zeta(-2)=\zeta(-4)=\zeta(-6)=\cdots=\zeta(-2n)=\cdots \qquad (\text{단, } n\text{은 자연수})$$

임을 증명하고

(RH)　"$\zeta(s)$의 다른 영점(zero)은 모두 $\mathrm{Re}s=\dfrac{1}{2}$의 선상에 놓여 있다."

라는 사실을 추측하였다. 그러나 리만은 이 추측을 증명하지 않았다. 그의 사후에 제타함수 $\zeta(s)$는 「리만 제타함수(the Riemann zeta function)」라고 불렸고 주장 (RH)는 『리만 가설』이라고 불렸다. 그 후 프랑스 수학자 Jacques Hadamard (1865～1963)와 벨기에 수학자 Charles de la Vallée-Poussin (1866～1962) 등과 같은 유명한 수학자들이 리만 가설을 해결하려고 하였지만 실패하였다. 아직까지도 이 가설은 풀리지 않고 있다. 1941년에 프랑스 수학자 베이유[6]는 함수체(function field)인 경우에 (RH)를 증명하였고, 1949년에 유한체(finite field) 상에서 정의되는 대수다양체의 제타함수에 대하여 (RH)와 유사한 소위, 『베이유 가설(Weil conjecture)』을 제시하였다.(참고문헌 [20]과 [21] 참조) 그 후, 1974년에 벨기에 수학자 델리네[7]가 매끄러운 사영다양체(nosingular projective variety)인 경우에 베이유 가설이 옳다는 것을 증명하였다.(참고문헌 [3] 참조) 이 업적과 하지 이론의 업적으로 델리네는 1978년에 수학의 노벨상인 필즈상을 수상하였다. 1980년에 일반적인 다양체(complete variety)인 경우에 베이유 가설이 진실이라는 사실을 증명하였다.(참고문헌 [4] 참조) 리만 가설은 정수론 분야에서 중요한 『소수 정리 (the Prime Number Theorem)』와 아주 밀접한 관계가 있다. 가령, 주장 (3)은 $\zeta(1+it)\neq 0$(단, $t\neq 0$ 인 실수) 이라는 주장과 동치이다.

리만 가설의 내용을 어느 정도 이해하기 위해서는 우선,

(ㄱ) 복소수(complex number)의 개념
(ㄴ) 해석적(解析的; analytic or holomorphic) 함수의 개념
(ㄷ) 유리형(meromorphic) 함수의 개념
(ㄹ) 해석적 접속(analytic continuation)의 개념

등의 기본적인 여러 개념을 알아야 한다. 복소수의 개념은 여러분 모두가 잘 알고 있기 때문에 설명은 생략하겠다. 복소함수 $f(z)$가 z_0의 근방에서 극한값

6) André Weil (1906~1998) : Wolf 상을 수상하였음. 시카고 대학과 고등연구소 교수를 역임하였음.
7) Pierre Deligne (1944~) : 1978년에 필즈상을 수상한 벨기에 수학자. 현재 고등연구소 교수로 재임.

$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ 을 가질 때 함수 $f(z)$ 는 z_0 에서 해석적이다라고 한다. 영역(a region) D 의 모든 점에서 복소 함수 $f(z)$ 가 해석적일 때 $f(z)$ 는 D 상에서 해석적이다라고 한다. 그리고 $\frac{f(z)}{g(z)}$ (단, $f(z)$ 와 $g(z)$ 는 해석적 함수이고 $g(z) \neq 0$ 임)의 형태의 함수를 유리형 함수라고 한다. 복소 함수 $f(z)$ 가 z_0 의 근방에서

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots \cdots + \frac{a_1}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

(단, $a_{-m} \neq 0$ 임)의 형태로 나타낼 수 있을 때 함수 $f(z)$ 는 z_0 에서 m 계의 극점 ($a\ pole\ of\ \mathrm{order}\ m$)을 갖는다고 한다. 이제부터 $\mathbb{C}$ 는 복소평면 즉, 복소수 전체의 집합을 나타내기로 한다. 영역 $D(\subset \mathbb{C})$ 에서 정의되는 해석적 함수 $f(z)$ 가 주어져 있다고 하자. D 를 포함하는 영역 $E(\neq D)$ 상에 유리형 함수 $F(z)$ 가 존재하여 D 상에서는 $f(z) = F(z)$ 일 때 함수 $F(z)$ 를 $f(z)$ 의 **해석적 접속**이라고 한다. 예를 들면, 기하급수로 주어지는 함수

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

는 중심이 원점인 단위원 내부 $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \}$ 에서 정의되는 해석적 함수이다. 그런데 함수 $F(z) = \frac{1}{1-z}$ 는 $E = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1 \}$ 상에서 정의되는 해석적 함수이며 D 상에서는 $f(z) = F(z)$ 이다. 그러므로 $F(z) = \frac{1}{1-z}$ 를 $f(z)$ 의 해석적 접속이라 말할 수 있다.

도움말 : (a) 1737년에 오일러는 자연대수

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad (\text{단, } 0! = 1)$$

가 무리수임을 증명하였고, 1873년에 프랑스 수학자 Charles Hermite (1822~1901)는 자연대수 e 가 초월수임을 증명하였다.
(b) $z = x + iy$ (단, x, y 는실수)가 복소수이고 $a > 0$ 일 때

$$\mathrm{Re}\, z := x \ (\text{즉, } z\text{의 실수부분}), \qquad \mathrm{Im}\, z := y \ (\text{즉, } z\text{의 허수부분})$$
$$e^z := e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad a^z := e^{z \ln a}, \qquad |z| := (x^2 + y^2)^{1/2}$$

와 같이 정의한다. 가령, n 이 자연수일 때 $|n^z| = e^{x \ln n} = n^x$ 이다.

(c) $x > 1$일 때 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 는 수렴한다. 그리고 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

는 발산한다.
(d) $D := \{\ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 1\ \}$이라 놓으면 D는 domain(open and connected set)이다. 제타함수 $\zeta(s)$는 D상에서 절대수렴하며 Weierstrass-M 테스트에 의하여 $\zeta(z)$는 해석적 함수이다.

리만은 다음의 정리를 증명하였다.

정리 1. (1) $\zeta(s)$는 전 복소평면 상으로 해석적으로 접속이 가능하며 $s=1$에서만 단순 극점(a simple pole)을 지니며 이의 residue는 1 이다.
(2) 리만 제타함수는

(FE) $$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

와 같은 함수방정식을 만족한다. 여기서

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt \quad (\text{단, } \mathrm{Re}\,s > 0)$$

으로 정의되며 $\Gamma(s)$는 해석적 접속을 지닌다.

(3) $0 = \zeta(-2) = \zeta(-4) = \cdots = \zeta(-2n) = \cdots$ (단, n 은 자연수).

이제, 리만 제타함수의 성질을 열거하겠다. $\zeta(s)$에 관한 참고문헌으로 [10,11, 12, 15]을 소개한다.

(R1) $\mathrm{Re}\,s > 1$이면 $\zeta(s) \neq 0$이다.
(R2) $k \in \mathbb{Z}^+$가 자연수일 때

$$\zeta(2k) = (-1)^k \pi^{2k} \frac{2^{2k-1}}{(2k-1)!}(-\frac{\mathrm{B}_{2\mathrm{k}}}{2\mathrm{k}})$$

이다. 여기서 B_k는

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k$$

으로 정의되는 베르누이(Bernoulli) 수이다. 가령,

$$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\frac{\pi^4}{90},\quad \zeta(6)=\frac{\pi^6}{945},\quad \zeta(8)=\frac{\pi^8}{9450},$$

$$\zeta(10)=\frac{\pi^{10}}{93555},\quad \zeta(12)=\frac{691}{638512875}\pi^{12},\cdots.$$

(R3) $k\in\mathbb{Z}^+$가 자연수일 때

$$\zeta(-k)=-\frac{1}{k+1}\sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}B_r$$

이다. 단, $\binom{k+1}{r}$ 는 $k+1$ 개중에서 r 개를 뽑는 경우의 수이다. 즉,

$$\zeta(-2n)=0,\qquad \zeta(1-2n)=-\frac{B_{2n}}{2n},\quad n=1,2,3,\cdots.$$

(R4) $\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\gamma+O(s-1)\quad (s\to 1)$

이다. 여기서

$$\gamma:=\lim_{n\to\infty}(1+\cdots+\frac{1}{n}-\log n)$$

은 오일러 상수이다. 아직까지도 오일러 상수가 무리수인지 초월수인지를 모르고 있다.

(R5)

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}+\frac{s}{12}-\frac{s(s+1)(s+2)}{720}+\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{30240}$$
$$-\cdots\cdots+\frac{B_n}{n!}s(s+1)\cdots(s+n-2).$$

단, $s=0,-1,-2,\cdots,-n+1.$

리만 가설 (RH)는 아직까지도 증명되지 않았다. 리만 가설을 해결하기 위해 노르웨이 수학자 셀버그[8]는 1950년경에 소위, 셀버그 트레이스 공식(trace formula)을 창안해내었다. 이 트레이스 공식은 매우 심오하고 아름다운 이론으로 Lie 군의 표현론, 보형형식론, 수리물리, 미분기하학 등의 분야에 응용되었다 (참고문헌 [10, 17, 19, 22, 23]). 지난 10여 년 전에는 독일 수학자 데닝어[9]는 코호모로지 접근 방법으로 motivic L-함수의 여러 성질들을 유도하였으며 이의 리만 가설을

8) Alte Selberg (1917~2007) : 보다 자세한 것은 부록을 참조할 것.
9) Christopher Deninger (1959~) : 독일 수학자. 1998년 ICM에서 기조강연을 하였음.

해결하려고 시도하였다 (참고문헌 [5, 6, 7]). 물론, motivic L-함수 또는 motivic 제타함수는 리만 제타함수의 경우를 일반화한 함수이다 (참고문헌 [13]).

함수 $\mu: \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ 를 아래와 같이 정의하자. 임의의 $x \in \mathbb{Z}^+$ 에 대하여 $x = p_1 p_2 \cdots p_k$ (단, p_i들은 소수이며 같을 수가 있다.) 이면

$$\mu(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \textit{ is divisible by the square of a } \text{prime}, \\ 1 & \text{if } \textit{all } p_i \textit{ are distinct } \text{and } k \textit{ is even}, \\ -1 & \text{if } \textit{all } p_i \textit{ are distinct } \text{and } k \textit{ is odd}. \end{cases}$$

가령, $\mu(12) = \mu(25) = 0$, $\mu(6) = 1$, $\mu(70) = -1$ 임을 쉽게 알 수 있다.
함수 M: $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ 를

$$M(N) := \sum_{n=1}^{N} \mu(n)$$

으로 정의한다.

정리 2. (RH) is true iff $M(N)$ grows no faster than a constant multiple of $N^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ as $N \to \infty$ for any $\epsilon > 0$.

이 정리는 오래 전에 증명되었다.

2004년에 Xavier Gourdon과 Patrick Demichel 은 Odlyzko-Schönhage 계산법을 이용하여 1조개이상의 리만제타함수의 영점을 발견하였다. 리만의 유고집에 의하면 리만이 첫 여섯 번째까지의 영점을 계산하였다고 전해지고 있다. 리만의 유고집을 검토한 후 지겔[10]은 소위 리만-지겔 공식(the Riemann-Siegel Formula)을 발견하였다 (참고문헌 18]). 이 공식의 중요성이 40여년이 지나서야 밝혀졌다. 이 공식에 기반을 두고 많은 사람들이 $\zeta(s)$ 의 영점을 발견하는 계산법을 개발하여 왔다. 아래에 재미있는 말을 인용한다.

I don't believe in God, but I believe in the Riemann Hypothesis. For the latter there are more than 400,000,000,000 reasons to believe.

-Manoj Verma-

10) Carl Ludwig Siegel (1896~1981) : 독일의 위대한 수학자. 첫 번째 Wolf 상을 수상하였음. 괴팅겐대학과 프린스턴 고등연구소 교수를 역임하였음.

T 가 양수일 때 $N(T)$를 사각형 $0 < \mathrm{Re}\,s < 1,\ 0 < \mathrm{Im}\,s < T$ 안에 있는 $\zeta(s)$의 영점들의 개수라고 하자. 1905년에 H. von Mangoldt (1854~1925)는

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi} T + O(\log T)$$

와 같은 점근 공식을 얻었다. 그리고 리만 제타함수는

$$(s-1)\zeta(s) = \frac{1}{2} e^{bs} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)} \prod_{\rho} (1 - \frac{s}{\rho}) e^{s/\rho}$$

의 무한곱 관계식을 만족한다. 여기서, b는 상수이고 $\prod_{\rho}$는 $\zeta(s)$의 자명하지 않는 모든 영점들의 곱을 나타낸다.

이제 소수가 어떻게 분포되어 있는가를 살펴보자.
가령, 9,999,900 과 10,000,000 사이에는

9,999,901 ; 9,999,907 ; 9,999,929 ; 9,999,931 ; 9,999,937 ;
9,999,943 ; 9,999,971 ; 9,999,973 ; 9,999,991

와 같이 9개의 소수가 있다. 그런데 10,000,000 과 10,000,100 사이에 있는 소수는

10,000,019 ; 10,000,079

밖에 없다. 이 예에서 보듯이 소수의 분포에 관하여 무엇이라 말할 수 없는 입장이다.

$$2^{32,582,657} - 1 \quad \text{(9,808,358 자리수)}$$

이 지금까지 알려진 가장 큰 소수이다. 이 소수는 2006년 9월 4일에 Curtis Cooper와 Steven Boone에 의해 발견되었으며, 44번째 Mersenne 소수이다. 그리고 Mersenne 소수가 아니며 알려진 가장 큰 소수는

$$19,249 \times 2^{13,018,586} + 1 \quad \text{(3,918,990 자리수)}$$

이다.

소수정리 3.

(3)’ $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi(n)}{n}\log n = 1.$$

J. Hadamard, de la Vallée-Poussin, A. Selberg 등의 수학자들에 의하여 상기의 소수 정리가 증명되었다. 이의 증명과정에서 리만 제타함수 $\zeta(s)$의 자명하지 않는 영점(zero)들이 모두 y 축과 $x=1$ 직선 사이에 있다는 사실을 사용하고 있다. 그래서 소수 정리는 리만 가설 (RH)와 매우 밀접한 관계가 있음을 알 수 있다. 또, 우리는

(5) $$\pi(n) \sim 1+\cdots+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot\zeta(k+1)}\cdot\frac{(\log n)^k}{k!}$$

임을 증명할 수 있다. (5)로부터 소수 정리와 리만 제타함수의 이론과 어느 정도 연관되어 있음을 어렴풋이 알 수 있다.

정리 4. 소수 정리는 $\zeta(1+it)\neq 0$ (단, $t\neq 0$ 인 실수)이라는 주장과 동치이다.

정리 4로부터 소수 정리와 리만 제타함수와는 아주 밀접한 관계가 있음을 재확인할 수 있다. 만약에 리만 가설 (RH)가 진실이라면, 우리는 소수의 분포에 관한 보다 자세하고 구체적인 정보와 지식을 얻을 수 있다.

예를 들어, 다음의 흥미로운 문제를 생각하여 보자.

문제 A. $4n+1$ (단, n 은 자연수) 의 형태의 소수의 개수가 무한개 인가 ?
예를 들면,

$5,\ 13,\ 17,\ 29,\ \cdots,\ 10006721,\ \cdots$ 등은 $4n+1$ 형태의 소수이다.

디리클레[11)]의 정리. k와 l이 서로 소인 자연수라고 하자. 그러면, $kn+l$ (단, n 은 자연수)의 형태의 소수의 개수는 무한이다.

그래서 문제 A는 디리클레의 정리에 의하여 해결된다.

11) Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805~1859) : 수론을 연구한 독일 수학자.

이제 골드바하 가설에 관한 역사적인 배경과 이 가설과 관련된 여러 최근의 놀랄만한 결과들을 소개하겠다.

1742년 6월 7일에 프러시아 수학자 골드바흐[12)]는

(6) 『5 보다 큰 자연수는 세 개의 소수들의 합으로 나타낼 수 있다』

라고 추측하는 내용이 담긴 편지를 스위스 수학자 오일러에게 보냈다. 예를 들면,

6=2+2+2, 7=2+2+3, 8=2+3+3, 9=3+3+3, 10=2+3+5,

11=3+3+5, 12=2+5+5, 13=3+5+5, 14=2+5+7, 15=3+5+7,

16=2+3+11=2+7+7, 17=3+3+11=3+7+7, 18=2+5+11,

19=3+5+11=5+7+7, 20=2+7+11, 21=3+7+11=5+5+11=7+7+7,

22=2+3+17=2+7+13, ……………

등이다. 오일러는 이 편지를 받은 후 이 문제에 흥미를 가지며

(7) 『2 보다 큰 짝수는 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다』

라는 가설을 내놓았다. 가령,

4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7=5+5, 12=5+7,

14=3+11=7+7, 16=3+13=5+11, 18=5+13=7+11,

20=3+17, 22=5+17=11+11, 24=5+19=7+17=11+13,

26=13+13=7+19, 28=11+17, ……………

등이다. 주장 (6)을 삼변수(ternary) 골드바흐 가설이라 하고 주장 (7)을 이변수

12) 크리스천 골드바흐 [Christian Goldbach (1690~1764)] : 프러시아 (지금은 러시아) 수학자. 수론 연구에 많은 업적을 남겼음.

(binary) 골드바흐 가설이라고 부른다. 주장 (7)이 우리가 지금까지 익히 알고 있는 골드바흐 가설이다. 또한 우리는

(8) 『 9보다 큰 홀수는 세 개의 홀수인 소수의 합으로 나타낼 수 있다』

라는 추측을 약한(weak) 골드바흐 가설이라 한다. 예를 들면,

11=3+3+5, 13=3+3+7=3+5+5, 15=3+5+7=5+5+5,

15=3+5+7=5+5+5, 17=3+7+7=5+5+7, ……………

등이다.

약 260년이 지난 지금까지도 골드바흐 가설은 풀리지 않았다! 유명한 전문 수학자들뿐만 아니라 아마추어 수학자들이 이 가설을 풀려고 시도하였지만 실패하였다. 1973년에 중국 수학자 첸징륜[13](Jing-Run Chen)는 그의 논문 [1], [2]에서 체(sieve) 방법을 사용하여

(9) 『 p가 소수로 $p+2$ 가 소수이든가 $p+2$ 가 두 소수의 곱이 되는 p가 무수히 많이 존재한다 』

는 사실을 증명하였다. 게다가 첸징륜은 상기의 논문에서

(10) 『 충분히 큰 임의의 짝수는 모두 한 소수와 두 소수의 곱의 형태로 쓸 수 있다 』

라는 사실을 증명하였다. 예를 들면,

$$14=3+11=5+3\times 3, \qquad 32=13+19=7+5\times 5,$$

$$102=11+91=11+7\times 13, \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

등이다. 그래서 보통 골드바흐 가설을 **<1+1>** 로 표시하고 첸징륜의 결과는

13) 진경윤 [陳景潤 (1933~1996)] : 1953년에 중국 Xiamen 대학을 졸업하고, 중국 과학 학술원에서 유명한 중국 수학자 Hua Luogeng (1910~1985)의 지도아래 해석적 수론을 공부하였음.

<1+2> 로 표시한다고 한다. 처음의 1 은 하나의 소수를 나타내고 다음 숫자 2는 두 개의 소수의 곱을 의미한다. 첸칭륜의 놀랄만한 결과 (10)은 1966년에 발견되어 증명되었다는 사실이 전 세계에 알려졌다. 그러나 그 당시에 중국 문화의 역사를 후퇴시켰던 문화혁명이란 소용돌이로 인하여 7년이 지나서야 (10)의 완벽한 증명이 수학저널 [1]에 게재되어 출판되었다. 첸칭륜은 이 연구결과로 인하여 하루아침에 전 세계에서 유명한 인사가 되었다. 보다 자세한 것은 부록을 참고하길 바란다.

1975년에 휴 몽고메리(Hugh Montgomery)와 로버트 보간(Robert Vaughan)은 **『대부분의 짝수들은 두 개의 소수의 합으로 나타낼 수 있다』**는 사실을 증명하였고, 2002년에는 영국 수학자 로저 히드-브라운(Roger Heath-Brown)은 그의 동료와 함께 **『상당히 큰 짝수는 두 개의 소수와 2^{13} 의 합으로 쓸 수 있다』**라는 사실을 증명하였다.

잘 알려진 쌍둥이 소수(twin primes) 문제에 관하여 이야기할까한다.

$$3,5\,;\;\; 5,7\,;\;\; \cdots\;\; 10016957, 10016959\,;\;\; \cdots\,;\;\; 10^9+7,\, 10^9+9\,;\;\; \cdots$$

와 같이 차가 2 인 소수 짝을 **「소수 쌍둥이(prime twin)」**이라고 한다. 100,000 보다 작은 소수 쌍둥이의 개수는 1224 개이고 1,000,000 보다 작은 소수 쌍둥이의 수는 8164 개이다. 지금까지 알려진 소수 쌍둥이 중에서 가장 큰 것은

$$\{\, 2{,}003{,}663{,}613 \cdot 2^{195{,}000} - 1,\;\; 2{,}003{,}663{,}613 \cdot 2^{195{,}000} + 1 \,\}$$

이다. 이것은 지난 2007년 1월 15일에 발견되었다. 이제 흥미롭고 자연스런 문제를 제기할 수 있다.

(PTP) "소수 쌍둥이의 개수는 무한인가 ?"

(PTP) 문제는 아직까지도 해결되지 않았다. 많은 전문가들은 소수 쌍둥이의 개수가 무한이라고 추측하고 있다. 그래서 이 추측을 **소수 쌍둥이 추측**(Twin Prime Conjecture)라고 한다. 보다 나아가 아래의 문제를 제기할 수 있다.

(PTP*) "$\{\, p \mid$ 단, $p, p+2,\; p+6$ 은 모두 소수 $\}$의 개수는 무한인가?"

물론 이 문제도 풀리지 않았다.

소수 쌍둥이 추측과 관련된 놀랄만한 결과가 약 2년 전에 얻어졌다. 2005년에 미국 수학자 골드스톤(Dan Goldston), 항가리 수학자 핀츠(Janos Pintz) 와 터키 수학자 일디림(Cem Yildirim)은 함께 쓴 논문 [8]에서

$$\text{f}-\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\log p_n} = 0$$

임을 증명하였다. 여기서, $\text{f}-\lim$[14] 는 limit inferior 을 나타내고, p_n 는 n 번째 소수이다. 게다가 그들은 최근에 논문 [9]에서

$$\text{f}-\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\sqrt{\log p_n (\log\log p_n)^2}} < \infty$$

임을 증명하였다. 터키 수학자 일디림은 2002년 7월에 전북대학에서 개최된 국제학술회의에서 「리만제타함수와 소수의 분포에 관하여」란 제목으로 초청강연을 하였다. 그 후 연세대학에서 비슷한 토픽으로 집중강연을 하기도 하였다. 그는 아직 결혼하지 않고 독신으로 지내고 있다.

다음은 자연수가 아닌 수인 원주율 π 에 대하여 간략하게 언급하겠다.
원주율 π 는

(원둘레) ÷ (지름)

으로 정의되는 수이다. 이 정의에서 원주율 π 는 **기하학적**이며 아름다운 수임을 알 수 있다. 원주율 π 는 자연수도 아니고 분수도 아님이 알려져 있다. 실제로

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419 7 \cdots\cdots\cdots\cdots$$

로 주어지며 끝이 없는 무한 소수이다. 또한 π 는

14) 한글(hwp)에서 limit inferior의 기호를 나타낼 수 없어 상기와 같은 기호를 사용하였음.

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots\cdots \right)$$

의 무한 합으로 나타낼 수 있다. 최근에 들리는 소문에 의하면 뉴욕에 거주하고 있는 러시아 출신의 처드노프스키(Chudnovsky) 형제는 소수점 이하 80억 자리의 계산을 이미 끝내고 소수점 이하 1조 자리까지의 계산을 진행 중이라고 한다. 그리고 18세기에 스위스 수학자 오일러는

$$\frac{6}{\pi^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{25}\right)\left(1 - \frac{1}{49}\right)\left(1 - \frac{1}{121}\right)\left(1 - \frac{1}{169}\right)\cdots$$

즉,

$$\frac{6}{\pi^2} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right)\left(1 - \frac{1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{1}{11^2}\right)\left(1 - \frac{1}{13^2}\right)\cdots$$

와 같은 아름다운 공식이 성립한다는 사실을 증명하였다. 이 공식에서 원주율 π 는 모든 소수와 밀접한 관계가 있다는 것을 추측할 수 있다. 1882년에 독일 수학자 Ferdinand von Lindemann (1852～1939)는 π 가 초월수임을 증명하였다. 즉, 원주율 π 가 유리수 계수를 갖는 다항식의 영점(zero)이 될 수 없다. 그래서 많은 수학자들뿐만 아니라 일반 사람들이 원주율 π 에 매료되어 이에 관한 저서도 많이 발간하였으며 연구하였다. 참으로 원주율 π 는 기하학적이고 정수론적인 성질을 지닌 아주 신비롭고, 아름다운 수일뿐만 아니라 우주적인 수라고 할 수 있다.

참고로 지금 특히 중국 수학자들을 포함하여 여러 수학자들이 다음의 문제를 연구하고 있다는 사실을 언급하고 싶다.

문제 : 홀수인 자연수를 항상

$$2^n + p, \quad \text{단,} \quad p \text{ 는 소수임}$$

의 형태로 쓸 수 있을까 ?

가령, $5=2^1+3$, $7=2^2+3$, $9=2^2+7$, $13=2^1+11$, $\cdots$,

$29=2^4+13$, $31=2^1+29$, $\cdots$, $37=2^3+29, \cdots$,

끝으로 소수에 관한 흥미로운 문제들을 소개하겠다.

문제 I. N을 주어져 있는 자연수라고 하자. 아래 형태의 수

$$n^2-n+p, \qquad 0 \le n \le N, \quad \text{단, } n \text{ 은 자연수}$$

가 모두 소수가 되게 하는 소수 p가 있느냐 ? 이 문제도 역시 아직까지도 풀리지 않았다.

예. (1) $N=16$, $p=17$. (2) $N=40$, $p=41$.

문제 II. n^2+1 (단, n 은 자연수)의 형태의 소수의 개수는 무한인가 ? 가령,

$$2,\ 5,\ 17, 37,\ \cdots\ ,\ 65537,\ \cdots\ .$$

이 문제의 해답은 아직까지도 모르고 있다.

문제 III. p_n 을 n 번째 소수라고 하자. 집합 $\{p_n-p_{n-1} \mid n \text{ 은 자연수}\}$의 원소 중에서 가장 큰 값은 ? 또, 아래의 극한값

$$\lim_{n\to\infty}(p_n-p_{n-1})= \ ?$$

은 무엇일까 ?

문제 IV. n 이 자연수라고 하자.

"n 과 $2n$ 사이에 소수가 존재하느냐 ?"

이 질문은 Bertrand의 문제로 알려져 왔는데 체비쉐프에 의하여 이 질문이 옳다는 사실이 밝혀졌다.

[참고문헌]

[1] J.-R. Chen, On the representation of a large even integer as the sum of a prime and a product of at most two primes, Sci. Sinica, **16** (1973), 157-176.

[2] J.-R. Chen, On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes [Chinese], J. Kexuse Tongbao, **17** (1966), 385–386.

[3] P. Deligne, La conjecture de Weil, I, Publ. Math. IHES, Vol. 43 (1974), 273-307.

[4] P. Deligne, La conjecture de Weil II, Publ. Math. IHES, Vol. 52(1980), 137-252.

[5] C. Deninger, On the Γ-factors attached to motives, Invent. Math. vol. 104 (1991), 245-261.

[6] C. Deninger, Local L-factors of motives and regularized determinants, Invent. Math. Vol. 107 (1992), 135-150.

[7] C. Deninger, Evidence for a cohomological approach to analytic number theory, Proc. of European Congress of Mathematicians, Birkhäuser (1994), 491-510.

[8] D. Goldston, J. Pintz and C. Yildirim, Primes in tuples I, to appear in Annals of Math. or math.NT/0508185.

[9] D. Goldston, J. Pintz and C. Yildirim, Primes in tuples II, arXiv:math. NT/0710.2728v1.

[10] D. A. Hejhal, The Selberg trace formula and the Riemann zeta function, Duke Math. J. Vol. 43, No. 3 (1976), 441-482.

[11] L. K. Hua, Introduction to Number Theory, Springer-Verlag (1982).

[12] N. Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer-Verlag (1984).

[13] Y. Manin, Lectures on Zeta Functions and Motives, Lecture Notes (Columbia Univ.), 1991.

[14] M. Monastyrsky, Riemann, topology and physics, Birkhäuser (1987).

[15] Y. Motohashi, Spectral theory of the Riemann zeta function, Cambridge Univ. Press (1997).

[16] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einen gegebenen Grösse, Gesammelte mathematischen Werke (1859), 145-153 (Dover, 1953).

[17] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., Vol. 20 (1956), 47-87.

[18] C. L. Siegel, Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astromie und Physik 2 (1932), 45-80.

[19] A. Voros, Spectral Functions, Special Functions and the Selberg Trace Formula, Communications Math. Physics, Vol. 111 (1987), 439-465.

[20] A. Weil, On the Riemann Hypotheses in function-fields, Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 27 (1941), 345-347.

[21] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 55 (1949), 497-508.

[22] D. Zagier, Eisenstein series and the Riemann zeta function, Tata Institute for Fundamental Research, Bombay (1979), 275-301.

[23] D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper, Hochschultext, Springer-Verlag (1981).

참고로 리만가설, 골드바흐 가설, 소수 쌍둥이 추측과 관련된 흥미로운 논문과 책을 아래에 소개하겠다.

[a] J. B. Conrey, The Riemann Hypothesis, Notices of the AMS, 50 (2003), no. 3, 341-353.

[b] H. M. Edwards, Riemann's Zeta Function, Academic Press, New York, 1974.

[c] D. A. Goldston, Are there infinitely many twin primes ?, arXiv:0710.2123v1 [math.NT] (2007).

[d] A. Odlyzko, The 10^{22}-nd zero of the Riemann zeta function, Contemp. Math. Series, AMS. Providence, RI (2001), 139-144.

[e] K. Soundararajan, Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yildirim, Bulletin of the AMS, vol. 44, No. 1 (2007), 1-18.

[f] J. Wu, Chen's double sieve, Goldbach's conjecture and the twin prime problem 2, arXiv:0709.3764v1 [math.NT] (2007).

[부록]

셀버그(Atle Selberg)의 명복을 빌며

지난 8월 6일에 노르웨이 수학자 애틀레 셀버그가 90세의 나이로 세상을 떠났다는 소식을 최근에 여러 매체로 통하여 접하게 되었다. 뉴욕 타임즈, LA 타임즈, 워싱턴 포스트 등의 주요 일간지가 그의 사망 소식을 전하며 그의 일생과 뛰어난 연구 업적을 다루었다. 셀버그는 필자와 학문적으로 인연이 많은 수학자 중의 한 사람이다. 필자가 U. C. Berkeley에서 박사과정을 하고 있을 때 인도 수학회의 수학저널에 게재된 그의 유명한 논문[15)]을 이해하려고 지도교수와 함께 몇 달 동안 세미나를 하면서 고군분투한 기억이 지금도 생생하게 떠오른다. 유학 첫해에 버클리에서 필자는 이치로 사타케 교수의 강의를 수강하면서 셀버그의 논문과 그의 업적을 알게 되었다. 물론 위대한 수학자 지겔(Carl Ludwig Siegel, 1896∼1981)과 베이유(André Weil, 1906∼1998)의 위대한 업적도 알게 되었다. 그때 수학이란 학문이 어떠한 학문인가를 진지하게 생각하였던 기억이 떠오른다.

셀버그는 1917년 6월 14일에 노르웨이의 랑게순드(Langesund)에서 태어났다. 17세가 되던 해에 우연히 노르웨이 수학저널에 게재된 인도 수학자 라마누잔에 관한 논문 『The Indian Srinivasa Ramanujan, a remarkable mathematical genius[16)]』을 읽게 되었다. 이 논문은 주로 라마누잔의 흥미로운 일생과 그의 신비로운 여러 공식을 다루고 있었다. 이를 계기로 그는 수학에 매료되어 수학에 관심을 갖게 되었고, 1936년 노르웨이의 수도인 오슬로에서 개최되었던 ICM에서 독일의 수학자인 헥케(Erick Hecke, 1887∼1947)의 강연을 듣고 큰 감명을 받은 후 수학자의 길을 걷겠다는 일생에 중대한 결심을 하게 되었다고 먼 훗날에 회고를 하고 있다[17)]. 그는 1943년에 오슬로 대학에서 리만 제타 함수의 영점에 관한 연구로 박사학위를 취득하였다. 1942년부터 1947년까지 오슬로 대학에서 특별연구원으로 근무하다가 1947년 지겔의 초청으로 프린스턴 고등연구소(이하 IAS로 약칭)에 초청되었다. IAS에서 1년을 보낸 후 시라쿠스(Syracus) 대학의 수학과에 부교수로 임명되었다. 1948년 여름에 복소 함수론의 이론을 전혀 사용하지 않고 아주 초등적인 방법으로 소수정리[18)]를 증명하였다. 이 증명은 기술적으로는

15) Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc. B., vol. 20 (1956), 47-87.

16) 이 논문의 저자는 오슬로 대학의 수학과의 교수인 스퇴르머 (Carl Störmer)이다.

17) 『Reflections around the Ramanujan centenary』: Alte Selberg, Collected Papers, Vol. I, Springer-Verlag (1989), 695-709.

18) Prime Number Theorem : 『20세기 수학자들과의 만남 [저자: 양재현, 경문사 (2005년 2쇄)』의 280∼285쪽을

초보적이지만 계산 자체는 상당히 복잡하다. 그는 이 증명에 관한 논문[19]을 작성하여 다음 해에 프린스턴 대학의 수학연보에 발표하였다. 그는 이 업적으로 바일(Hermann Weyl, 1885∼1955)과 지겔(1896∼1981)의 추천으로 1949년에 다시 IAS로 초청된 후 1950년에 영구직 연구원으로 임명되었다. 1950년에 미국의 캠브리지의 하버드 대학에서 개최되었던 ICM에서 필즈상을 수상하였고 1986년에는 울프상(Wolf Prize)을 수상하였다. 1951년에 IAS의 영구직 교수가 되었으며 1987년에 정년퇴임을 한 후 세상을 떠나기 전까지 IAS의 명예교수로 있었다.

그의 큰 연구 업적 중의 하나가 소위 셀버그 대각합 공식(the Selberg Trace Formula)이다. 이 공식은 Poisson 합 공식의 일반화라고 할 수 있는데 이 심오하고 아름다운 연구 내용은 앞에서 소개한 인도 수학저널(주석 [1]을 참고)에서 소개되어 그 후 보형형식의 이론, 군 표현론과 이론 물리학 분야에 지대한 영향을 끼쳤다. 예를 들면, 이 대각합 공식의 이론은 후에 랑그랭즈에게 큰 영감을 주어 1960년대 중반에 소위 『랑그랭즈 프로그램』의 탄생에 큰 영향을 끼쳤다. 현재 캐나다 토론토 대학의 아더(James Arthur) 교수가 대각합 공식의 이론을 일반화하며 수십 년 간 계속 연구하여 오고 있다. 셀버그는 리만가설[20]의 해결을 위해 노력하여 왔으며 이 가설과 관련된 여러 연구를 하였다. 즉, 리만 제타 함수의 영점에 관한 연구결과를 발표하였고, 셀버그 제타함수와 체 이론(sieve theory)[21]을 창안하여 연구하였다. 그의 이름을 딴 셀버그 적분, 란킨-셀버그 L-함수, 셀버그 고유값 가설 등을 보더라도 그가 해석적 정수론 분야에서 위대한 업적을 남겼다는 사실을 알 수 있다. 특히 유명한 중국의 수학자 첸징륜(陳景潤, Jingrun Chen, 1933∼1996)은 그의 논문[22]에서 셀버그의 체 방법(sieve method)을 사용하여 『p 가 소수로 $p+2$ 가 소수이든가 $p+2$ 가 두 소수의 곱이 되는 소수 p 가 무수히 많이 존재한다』는 사실과 『충분히 큰 임의의 짝수는 모두 한 소수와 두 소수의 곱의 합의 형태로 나타낼 수 있다』라는 탁월한 결과를 증명하였다. 예를 들면,

$$32 = 7 + 5 \times 5, \qquad 100 = 23 + 7 \times 11, \qquad 102 = 11 + 13 \times 7.$$

첸칭륜의 상기의 두 번째 결과는 소위 『골드바흐 가설』을 해결하려고 시도하며 연구하는 가운데서 얻어 졌다. 1999년에 중국 정부는 이 뛰어난 업적을 기념하기

참고하길 바람.

19) An elementary proof of prime number theorem, Annals of Mathematics, vol. 50 (1949), No. 2, 305∼313.

20) the Riemann Hypothesis : 이에 관하여 일반인들이 쉽게 이해할 수 있도록 쓴 논문으로 『리만 가설에 관하여 : 저자 양재현』[[20세기 수학자들과의 만남]; 경문사 2005년 2쇄; 268∼290쪽과 298∼302쪽)을 추천함.

21) Alte Selberg, 『Lectures on sieves』, Collected Papers, Vol. II, Springer-Verlag (1991), 65-251.

22) J. R. Chen, On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes, Sci. Sinica 16 (1973), 157-176 또는 J. Kexue Tongbao 17 (1966), 385-386.

위하여 『골드바흐 가설에 관한 최고의 업적』이란 제목으로 첸칭륜의 실루에트를 실은 우표를 발행하였다. 또한 그의 유명한 부등식

$$P_x(1,2) \geq \frac{0.67\,x\,C_x}{(\log x)^2}$$

도 이 우표에 인쇄되어 있다. 그의 박사학위 논문 지도교수가 다름아닌 저명한 루오겡 후아(Luogeng Hua, 華羅庚[화라경]; 1910～1985)이다.

필자는 2001년 2월에 랑그랭즈 교수의 초청으로 IAS에 단기간 초청된 적이 있었다. 매주 월요일에서 금요일까지 매일 3시에 풀드 홀(Fuld Hall)의 1층에서 다과회가 있는데 한번은 이 자리에서 셀버그를 본 적이 있었다. 그 당시 84세의 나이에도 불구하고 건강하여 보였으며 미남형의 얼굴이었다. 필자는 그가 아주 우아하고 멋있게 살아오며 아름답고 심오한 진리를 탐구 하며 곱게 늙었다는 느낌을 강렬하게 받았던 기억이 난다. 이전에 우리나라에 셀버그 같은 뛰어난 수학자가 있었더라면 대한민국의 수학의 위상이 국제적으로 높은 위상에 있고 적지 않는 뛰어난 수학자가 배출되었으리라는 생각을 가끔 하여 보았다. 이제 국내에도 셀버그처럼 심오하고 아름다운 수학 분야의 연구를 하며 세계 수학계에 지대한 공헌을 할 뿐만 아니라 우아하고 고상하게 늙어가는 수학자를 보기를 기대하여 본다.

끝으로 그의 별세에 심심한 애도의 뜻을 표함과 동시에 그의 명복을 빌며 이 글을 끝맺는다.