일반수학 1 기말고사(2012)
모범답안

<< 단 답 형 >>

1. $1-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$

2. $\frac{1}{2}(e-1)$

3. 109

4. $-\frac{\pi}{2}$

5. $\frac{-\ln x}{x+1}+\ln x-\ln(x+1)+C$

6. $\frac{4}{5}(\sqrt{1+\sqrt{x}})^5-\frac{4}{3}(\sqrt{1+\sqrt{x}})^3+C$

7. $\tan\frac{\theta}{2}+C$

8. ① ③ ⑤ ⑥

9. $\frac{x}{2}\{\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\}+C$

10. 66

<< 서 술 형 >>

11. $x=\ln t$ 라 하면 $dx=\frac{1}{t}dt$ 이므로 $\int \frac{1+\ln t}{t(3+2\ln t)^2}\,dt = \int \frac{1+x}{(3+2x)^2}\,dx$ 이고 우변의 피적분함수를 부분분수로 분해하면 $\frac{1+x}{(3+2x)^2} = \frac{1/2}{3+2x} - \frac{1/2}{(3+2x)^2}$ 이므로

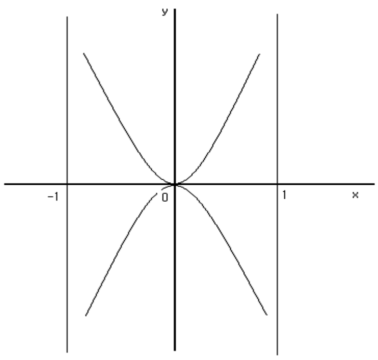
$$\text{준식} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{3+2x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(3+2x)^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\ln|3+2x| + \frac{1}{4}\frac{1}{3+2x} + C$$
$$= \frac{1}{4}ln|3+2\ln t| + \frac{1}{4}\frac{1}{3+2\ln t} + C$$

12. $$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2}\right)dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{c}{x+2}\right)dx$$
$$= \lim_{M\to\infty}[\ln|\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2}| - c\ln|x+2|]_0^M$$
$$= \lim_{M\to\infty}(\ln\frac{\sqrt{x^2+4}+M}{2} - c\ln(M+2) + c\ln 2)$$

이므로 수렴하기위해서는 $c=1$ 이어야한다. 그때의 적분 값은 $\ln 2$이다.

13.

수직점근선은 $1-x^2=0$으로부터 $x=-1$과 $x=1$이다. x축과 y축에 대하여 모두 대칭인 곡선이므로 $x \ge 0,\ y \ge 0$에서 $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$과 $x=1$로 둘러싸인 영역의 넓이만 구하여 4배한다. 제 1사분면에서 특이적분을 계산하면,



$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}(-1)\sqrt{1-x^2}\,|_0^{1-\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}(1-\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}) = 1$$

또는

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= \lim_{b\to 1^-}(-1)\sqrt{1-x^2}\,|_0^b$$
$$= \lim_{b\to 1^-}(1-\sqrt{1-b^2}) = 1$$

이므로 주어진 영역의 넓이는 4.

14.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n}{n3^n}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3}{n}=3$$

따라서, 수렴반지름 R은 $\frac{3}{2}$이다.

즉, $|2x-1|<3$이면 주어진 멱급수는 (절대)수렴한다.

(1) $2x-1=3$ (즉, $x=2$)일 때, 주어진 멱급수는 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$이고

교대급수 판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$는 수렴함을 확인할 수 있다.

(2) $2x-1=-3$ (즉, $x=-1$)일 때, 주어진 멱급수는

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-3)^n}{n3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$ 이고

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$는 발산함을 확인할 수 있다. 따라서 수렴구간은 $(-1,2]$ 이다.

15.

$$\frac{x^3}{x+2}=x^3\frac{1}{2\left(1-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)}=x^3\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}x^{n+3}\quad(|x|<2)$$