# 일반수학 1 중간고사(2012)
# 모범답안

## << 단 답 형 >>

1. $[0,1)\cup(1,\infty)$

2. $-1$

3. $(2^{\frac{4}{3}},2^{\frac{5}{3}})$

4. $-\frac{1}{2}$

5. $y=2ex+2e+1$

6. $\ln 2-\frac{1}{2}$

7. $\frac{8}{9}(2\sqrt{2}-1)$

8. $\frac{6}{5}\pi$

9. $\ln\sqrt{3}$

10. $e-1$

## << 서 술 형 >>

11. $f(0)>0$, $f(1)<1$ 이라 가정하자. (만약, $f(0)=0$ 이거나 $f(1)=1$ 이라면 $c=0,1$ 이 우리가 원하는 점이 된다)
보조함수 $g(x)=f(x)-x$를 생각하자. 그러면 $g$ 는 $[0,1]$ 에서 연속이고 $g(0)=f(0)-0>0$ 이고 $g(1)=f(1)-1<0$ 이므로 중간값 정리에 의해 $g(c)=0$ 인 $c\in[0,1]$ 가 존재한다. 즉, $f(c)=c$ 인 점이 존재한다.

12. 구간 $I$에서 $f$가 미분가능하고 모든 $x\in I$에 대하여 $f'(x)=0$이면 $f$는 상수함수임을 보이자. $a, b\in I$ $(a<b)$라 하자. 구간 $[a, b]$에서 평균값 정리에 따르면,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \text{-----} \ (1)$$

인 $c\in(a, b)$가 존재한다. 가정에 의해 $f'(c) = 0$이므로, (1)식으로부터 $f(a) = f(b)$를 얻고, 따라서 $f$는 상수함수이다.

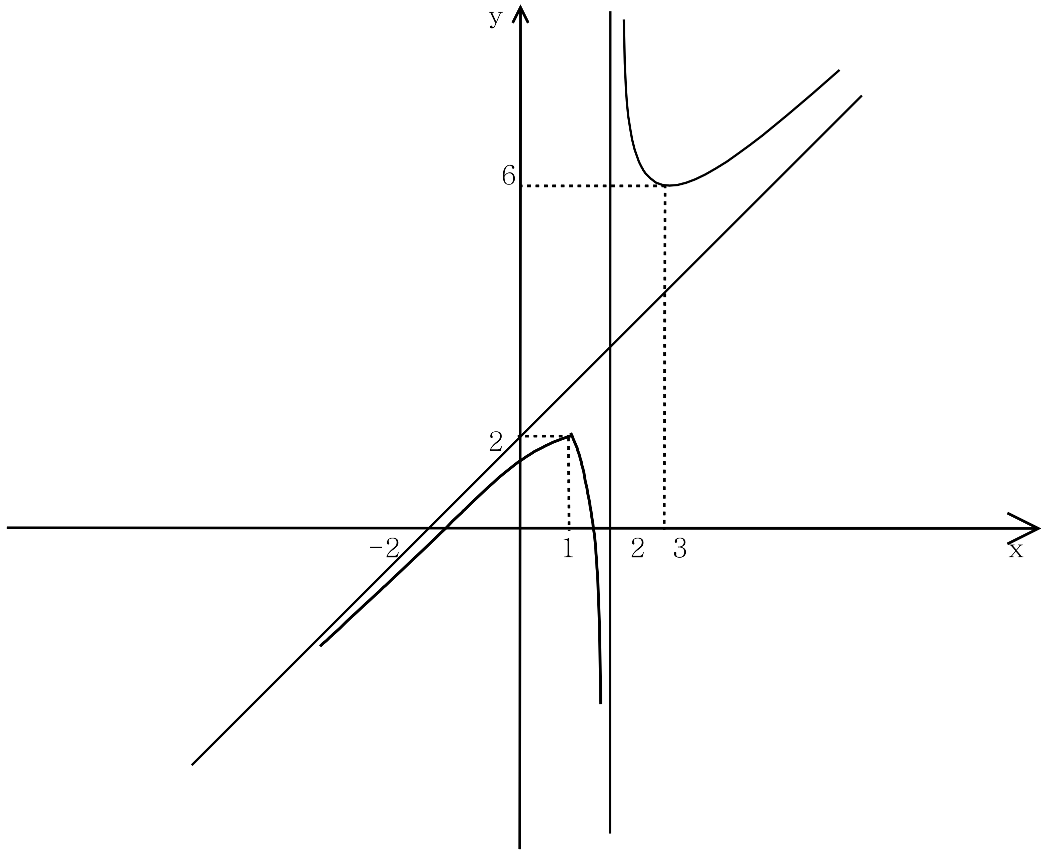
13. $f(x) = x+2+\dfrac{1}{x-2}$이고 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)] = 0$이므로 $f(x)$가 $y = x+2$을 점근선으로 갖는다. 또한 $\lim\limits_{x\to\pm 2} f(x) = \pm\infty$이므로 $x = 2$는 수직점근선이다. $f'(x) = 1-\dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$이므로 $f'(x) = 0$되는 점은 $x = 1$, $x = 3$이다.

$f'(x) = \dfrac{2}{(x-2)^3}$ .

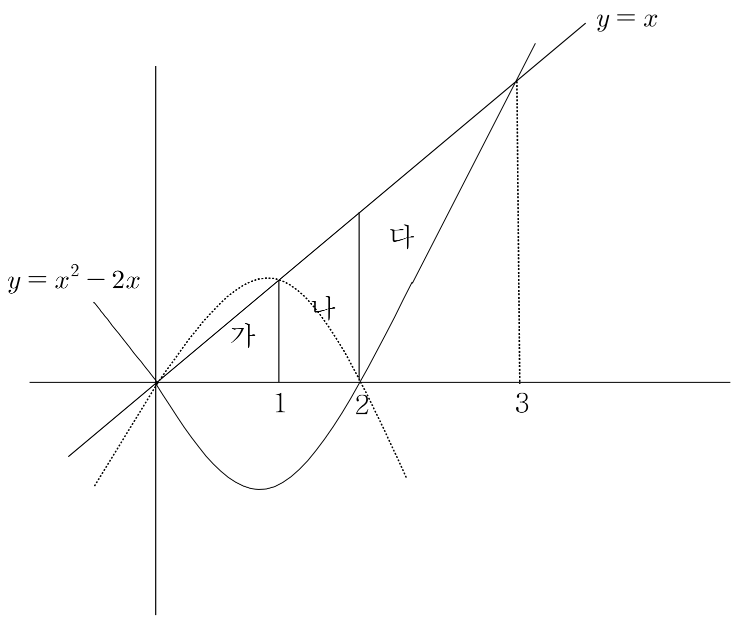
따라서 증감표를 그려보면

| x | | 1 | | 2 | | 3 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | - | | - | 0 | + |
| $f''(x)$ | - | - | - | | + | + | + |
| $f(x)$ | | 극대 | | | | 극소 | |

극댓값 $f(1) = \dfrac{1-3}{1-2} = 2$, 극솟값 $f(3) = \dfrac{9-3}{3-2} = 6$.




14.




$0<x<1$ 일 때 $y=x^2-2x$를 회전한 것이 $y=x$를 회전한 것보다

크기 때문에 세 영역으로 나누어서 계산한다.

부피 = 가 + 나 + 다

$$= \int_0^1 \pi(x^2-2x)^2\,dx + \int_1^2 \pi x^2\,dx + \int_2^3 \pi[x^2-(x^2-2x)^2]\,dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}(8-1)+(3^4-2^4)-\frac{1}{5}(3^5-2^5)-(3^3-2^3)\right)$$

$$= \frac{20}{3}\pi$$

15. 방정식 $x^3=mx$으로부터 세 교점의 $x$좌표는 $x=-\sqrt{m}, 0, \sqrt{m}$ 이다.

단면법으로 $V_x$을 구하면 $V_x = \int_0^{\sqrt{m}} \pi(mx)^2 - \pi(x^3)^2 dx$

$$= \pi\int_0^{\sqrt{m}} m^2x^2 - x^6 dx$$

$$= \pi\frac{4}{21}m^3\sqrt{m}$$ 을 얻는다.

원통각법으로 $V_y$을 구하면

$$V_y = \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi x f(x)dx - \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi x g(x)dx \qquad (f(x)=x^3, g(x)=mx)$$

$$= \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi x^4 dx - \int_0^{\sqrt{m}} 2\pi m x^2 dx$$

$$= \pi\frac{4}{15}m^2\sqrt{m}$$

을 얻는다. ($V_y$를 단면법으로 구할 수도 있다.)

조건 $\frac{V_x}{V_y}=1$ 으로부터 $\frac{5}{7}m=1$을 얻는다. 따라서 $m=\frac{7}{5}$이다.