일반수학2 기말고사(2012) 모범답안

1. $\dfrac{8}{15}$

2. $\dfrac{1}{80}\ln 33$

3. $-y^2\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k};\quad 2xy+2yz+x$

4. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

5. $\dfrac{32}{3}\pi$

6. $\dfrac{128}{15}\pi$

7. $\dfrac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$

8. -24π

9. $\dfrac{\pi}{8}$

10. 2

11. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g(x,y,z)=xy+2xz=5\sqrt{5}$ 라 놓고 Lagrange 승수법을 이용하자. $(f_x,f_y,f_z)=(2x,2y,2z)$, $(g_x,g_y,g_z)=(y+z,x,2x)$ 이므로

(*) $\begin{cases} 2x=(y+2z)\lambda \\ 2y=x\lambda \\ 2z=2x\lambda \end{cases}$ 를 만족하는 x,y,z 를 구하자.

$\lambda=0$ 이면 $x=y=z=0$ 이므로 제약조건 $g(x,y,z)$ 를 만족하지 않는다.

따라서, $\lambda\neq 0$ 이다. (*)에 의해서 $x=\dfrac{2y}{\lambda}$, $z=x\lambda=2y$ 이다.

$y=0$ 이면 $x=z=0$ 이므로 제약조건 $g(x,y,z)$ 를 만족하지 않는다. 따라서, $y\neq 0$ 이다.

$x=\dfrac{2y}{\lambda}$, $z=x\lambda=2y$ 를 (*)의 첫번째식에 대입하면 $\dfrac{4}{\lambda}=5\lambda$, $\lambda^2=\dfrac{4}{5}$ 를 얻는다.

이를 $g(x,y,z)$ 에 대입하면 $5\sqrt{5}=\dfrac{10}{\lambda}y^2$ 을 얻는다.

$\lambda>0$ 이므로 $\lambda=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ 이고 따라서, $y=\pm 1$ 를 얻는다.

그러므로, $(x,y,z)=(\sqrt{5},1,2)$, $(x,y,z)=(\sqrt{5},-1,-2)$가 최소거리가 되는 점이 된다.
따라서, 최소거리는 $\sqrt{f(x,y,z)}=\sqrt{10}$ 이다.

12. $P_y = Q_x = \dfrac{-x^2+4y^2}{(x^2+4y^2)^2}$ 이다.

타원 $\gamma : x^2+4y^2=4$ 의 외부와 C의 내부로 이루어진 영역에서 벡터장 F가 미분가능이므로 Green 정리를 이용하자.
즉, $Q_x - P_y = 0$ 이므로

$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot T\,ds = \oint_\gamma \boldsymbol{F} \cdot T\,ds$ 이다. (γ의 진행방향은 시계방향).

$\gamma(t) = <2\cos t, \sin t>$, $0 \le t \le 2\pi$
구하려는 적분은

$$\int_0^{2\pi} \left\langle \frac{-\sin t}{4}, \frac{2\cos t}{4} \right\rangle \cdot \langle -2\sin t, \cos t \rangle\, dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 2\sin^2 t + 2\cos^2 t\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1\, dt = \pi$$

13. $V = 2\int_0^{2\pi}\int_o^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_o^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

14. 곡면 S의 매개변수식은

$\mathrm{r}(u,v) = \langle 2\cos u,\ 2\sin u,\ v\rangle$, $R=\{(\mathrm{u},\mathrm{v}) \mid 0 \le \mathrm{u} \le 2\pi,\ 0 \le \mathrm{v} \le 4\}$으로 표현되고 곡면의 넓이는 $A=\iint_R 4\cos^2 u \left|\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial v}\right| du\,dv$ 으로 주어진다.

$$\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2\sin u & 2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \langle 2\cos u, 2\sin u, 0\rangle$$ 이므로

$\left|\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial v}\right| = 2$ 이다. 따라서 주어진 곡면의 넓이는 $A=\iint_R 8\cos^2 u\,du\,dv$ $=32\pi$ 이다.

15. 발산정리를 이용하면

$$\begin{aligned}\iint_S F\cdot n\,dS &= \iiint_T \nabla \cdot <2x,y,z> dV \\ &= 4\iiint_T dV \\ &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{4-r^2} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= 8\pi\int_0^{\sqrt{3}} 3r - r^3 dr = 18\pi\end{aligned}$$