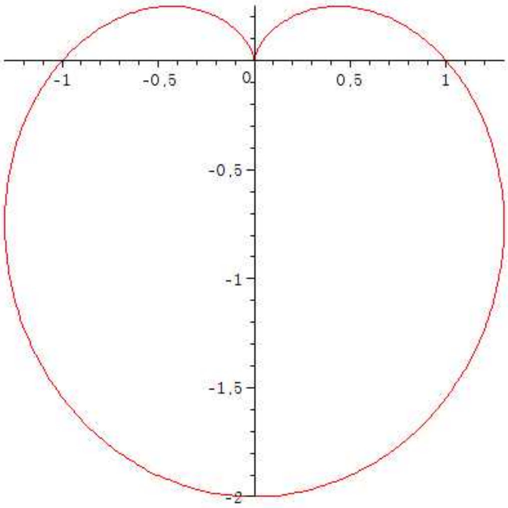
일반수학2 중간고사(2012) 모범답안

1. $y = \sqrt{3}\,x$
2. 8
3. $-\dfrac{25}{9}$
4. $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{12} = \dfrac{z-3}{-4}$
5. 6
6. $x = 3t,\ y = 1 - t,\ z = 2 - 2t$
7. $\left\{(\rho,\ \phi,\ \theta)\,|\,0 \le \rho \le 2\cos\phi,\ \ \phi \ge \dfrac{\pi}{4}\right\}$
8. 6
9. $\dfrac{13\sqrt{10}}{10}$
10. (0, 0) 또는 (0, 0, 5)

11. (r, θ) 대신 $(r, \pi-\theta)$를 대입해도 등식이 성립하므로 y-축에 대칭이다. 그래프의 개형은 다음과 같다.



12. $x = s^2 - t^2,\ y = t^2 - s^2$이라면 $z = f(x, y)$이다.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2s\frac{\partial z}{\partial x} - 2s\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -2t\frac{\partial z}{\partial x} + 2t\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$(2s\frac{\partial z}{\partial x} - 2s\frac{\partial z}{\partial y}) + a(s,t)(-2t\frac{\partial z}{\partial x} + 2t\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

따라서 $a(s,t) = \dfrac{s}{t}$이다.

13. $C : x = 2\cos t,\quad y = \sqrt{2}\sin t,\quad z = 2 - \sqrt{2}\sin t\,,\ 0 \le t \le 2\pi$

$$\text{곡선의 길이} = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dt}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (\sqrt{2}\cos t)^2 + (-\sqrt{2}\cos t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2dt$$

$$= 4\pi$$

14. $\nabla f = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$ 이므로, 주어진 곡면 위의 점 $P_n(x_n, y_n, z_n)$ 에서 접평면의 방정식을 구하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x_n}}(x-x_n)+\frac{1}{2\sqrt{y_n}}(y-y_n)+\frac{1}{2\sqrt{z_n}}(z-z_n)=0$$

이다. 위 방정식을 정리하면

$$\frac{x}{\sqrt{x_n}}+\frac{y}{\sqrt{y_n}}+\frac{z}{\sqrt{z_n}}=\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n}+\sqrt{z_n}$$

이고, $f(P_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로 P_n에서 접평면의 방정식은

$$\frac{x}{\sqrt{x_n}}+\frac{y}{\sqrt{y_n}}+\frac{z}{\sqrt{z_n}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

이다. 따라서 x, y, z 절편은 각각 $((\frac{1}{2})^{n-1}\sqrt{x_n}, 0, 0)$, $(0, (\frac{1}{2})^{n-1}\sqrt{y_n}, 0)$, $(0, 0, (\frac{1}{2})^{n-1}\sqrt{z_n})$ 이므로 $\alpha_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ 이다. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$은 공비가 $\frac{1}{4}$ 이고, 초항이 1인 무한등비급수의 합이므로

$\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$ 이다.

15. f 의 임계점은 $f_x(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2y^2} = 0$, $f_y(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2y^2} = 0$ 으로부터 $(x,y) = (0,0)$ 이고 이 점은 D의 경계에 있다. D 의 경계 중 (0,0)과 (4,0)을 잇는 선분과 (0,0)과 (0,1)를 잇는 선분위에서는 주어진 함수 $f(x,y) = 0$ 이다.

한편 (4,0)과 (0,1)을 잇는 선분, 즉

$y = -\dfrac{1}{4}x + 1 (0 \le x \le 4)$ 위에서는 $f(x,y) = \tan^{-1}(-\dfrac{1}{4}x^2 + x)$ 이다.

이차함수 $-\dfrac{1}{4}x^2 + x = -\dfrac{1}{4}(x-2)^2 + 1$ $(0 \le x \le 4)$는 최댓값이 1, 최솟값이 0이고, $\tan^{-1}(x)$는 증가함수이므로 이 선분위에서는 f의 최댓값은 $\tan^{-1}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ 이고 최솟값은 0 이다. 따라서 영역 D에서의 f의 최댓값은 $\dfrac{\pi}{4}$이고 최솟값은 0이다.