2013년 1학기 중간고사

단답형

1. $e^{2\sqrt{2}}$

2. $\begin{cases} y+3=-\dfrac{2}{3}(x-4) \\ y-3=-\dfrac{2}{3}(x+4) \end{cases}$ 다른형태 $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$

3. $\dfrac{2}{e^e-e}$

4. $\dfrac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})$

5. $3\sqrt{3}$

6. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

7. $\dfrac{79}{30}\pi$

8. $\dfrac{\pi}{4}$

9. $c=\dfrac{1}{2e}$, $c \leqq 0$

10. $2\pi(\dfrac{1}{4}ln3-\dfrac{1}{9})$

11. 함수 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$의 모든 점근선을 찾고 증가 및 감소 구간을 구하시오. 또한 함수의 오목 및 볼록성을 조사하여 주어진 함수의 그래프를 자세히 그리시오.

풀이 : $f'(x)=-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow f'(x)<0 \ \forall x \neq 0$

따라서 f는 $(-\infty,0)$와 $(0,\infty)$에서 감소함수이다.

또한 $f''(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2x+1)}{x^4}$이므로 변곡점은 $(-\frac{1}{2},e^{-2})$이며

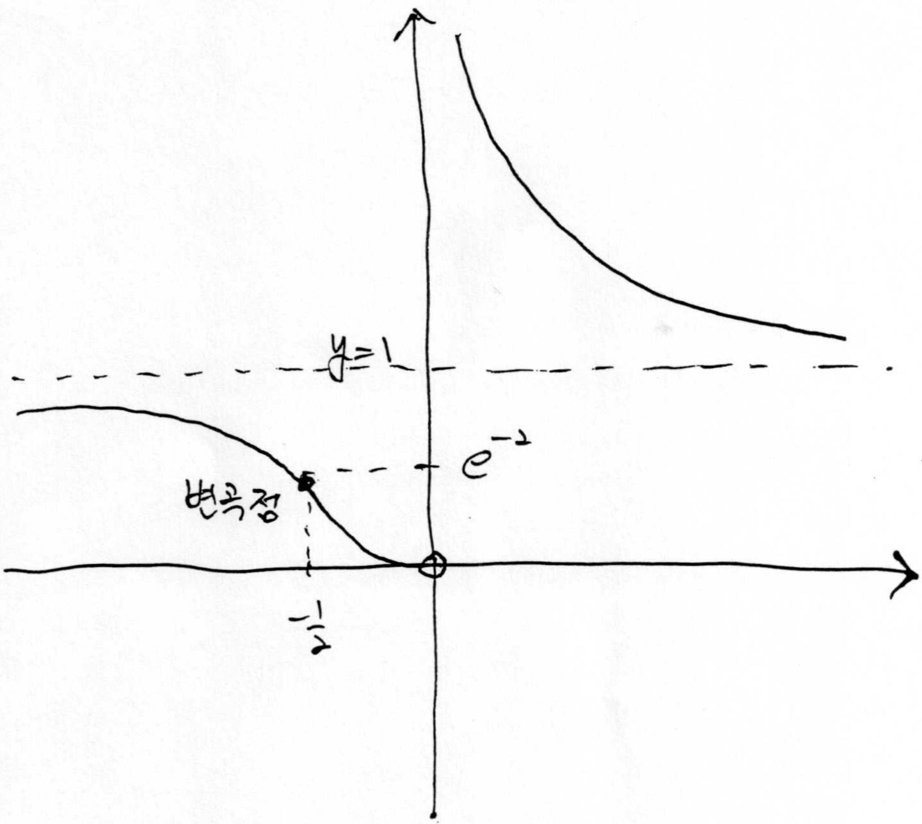
$(-\infty,-\frac{1}{2})$에서 f는 위로 볼록이고 $(-\frac{1}{2},0)$, $(0,\infty)$에서 아래로볼록이다.

그리고

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to -\infty} e^t=0$ 이므로 $x=0$는 수직점근선이다.

또한 $\lim\limits_{x\to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}}=1$ 이므로 $y=1$은 수평점근선이다.

따라서 함수의 그래프는 다음과 같다.



12. 함수 $y=\frac{\ln x}{x}\,(x>0)$ 대하여 미분에 관한 평균값정리를 이용하여 임의의 실수 $a<b$ 일 때 $b^a < a^b$ 임을 보이시오 (단 $a,b \in [e,\infty]$)

풀이 :
미분에 관한 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{b-a}=f'(c)$$ 를 만족하는 $c\in(a,b)$ 가 존재함을 알 수 있다

여기서 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 이므로

$$\frac{\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}}{b-a}=\frac{1-\ln c}{c^2} \Leftrightarrow \frac{a\ln b-b\ln a}{ab(b-a)}=\frac{1-\ln c}{c^2}<0,\ (\because c>e)$$

여기서 $a<b$ 이므로 $a\ln b < b\ln a$ 이다. 즉 $b^a < a^b$ 이다.

13. 밑면의 반지름이 3cm이고 높이가 6cm인 직원뿔 모양의 용기가 있다. 그 용기의 제일 꼭대기 윗부분에 구멍을 내어 매초 $10cm^3$의 물을 유입시킨다고 하자. 물의 높이가 3cm일 때, 물의 상승 속도를 구하시오

풀이 :

그림과 같이 t초 후에 유입된 물의 높이를 $h=h(t)$라 하면 수면의 반지름은 $3-\frac{h}{2}$이다.

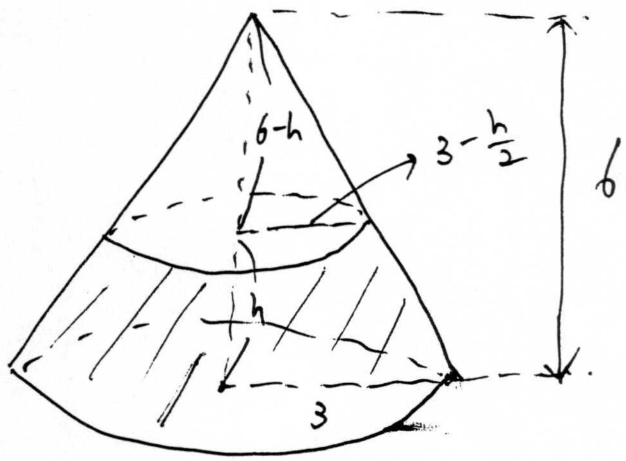
이때 부피를 V라 하면 $V=18\pi-\frac{1}{3}\pi\left(3-\frac{h}{2}\right)^2(6-h)$이다.

$$10=\frac{dV}{dt}=\frac{d}{dt}[18\pi-\frac{1}{3}\pi(3-\frac{h}{2})^2(6-h)]$$
$$=-\frac{2}{3}\pi(3-\frac{h}{2})(-\frac{1}{2})\frac{dh}{dt}(6-h)+(-\frac{1}{3}\pi)(3-\frac{h}{2})^2(-1)\frac{dh}{dt}$$

여기서 물의 높이가 $3cm$ 일 때, 즉 $h=3$ 대입하면

$$10=[-\frac{2}{3}\pi\frac{3}{2}(-\frac{1}{2})3+(-\frac{1}{3}\pi)(\frac{3}{2})^2(-1)]\frac{dh}{dt}$$
$$=[\frac{6}{4}\pi+\frac{3}{4}\pi]\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow v=\frac{dh}{dt}=\frac{10}{\frac{9}{4}\pi}=\frac{40}{9\pi}$$

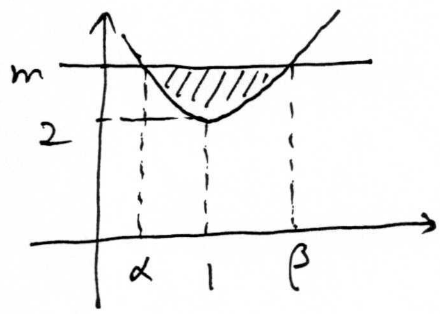


$6 : 3 = 6-h : x$

$\Rightarrow \quad x = 3-\frac{h}{2}$ (수면 반지름)

14. 실수 $m>2$ 에 대하여 직선 $y=m$ 과 곡선 $y=x+\frac{1}{x}$ 로 둘러싸인 영역을 x축을 중심으로 회전시켜 생긴 회전체의 부피가 18π 일때 m의 값을 구하시오

풀이 :



교점의 좌표를 $\alpha, \beta\,(\alpha<\beta)$라 두자.

$x+\frac{1}{x}=m \Leftrightarrow x^2-mx+1=0$

따라서 $\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=1$ 이다.

이제 회전체의 부피를 구해보면 다음과 같다.

$$V=\int_{\alpha}^{\beta}\pi(m^2-(x+\frac{1}{x})^2)dx=\int_{\alpha}^{\beta}\pi(m^2-(x^2+2+\frac{1}{x^2}))dx$$

$$=\pi[m^2(\beta-\alpha)-\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-2(\beta-\alpha)+(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha})]$$

여기서 다음과 같이 α, β의 성질을 이용하면

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{m^2-4}$$

$$\beta^3-\alpha^3=(\beta-\alpha)[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta]$$

$$\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=\frac{-(\beta-\alpha)}{\alpha\beta}=-(\beta-\alpha)$$

$$V=\frac{2}{3}\pi(m^2-4)\sqrt{m^2-4}=18\pi$$

따라서

$$(m^2-4)\sqrt{m^2-4}=27$$

$$\Rightarrow\sqrt{m^2-4}=3$$

$$\Rightarrow m^2=13$$

$$\Rightarrow m=\sqrt{13}$$

15. 원점 O에서 곡선 $y=e^{tx}$ $(t>0)$에 그은 접선의 접점을 A라고 하자. 점 A를 지나고 이 접선에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B라고 할 때, $\triangle AOB$의 넓이를 최소로 하는 t의 값을 구하여라.

<풀이>

접점을 (a, e^{at}) 라고 놓으면 접선의 기울기 $f'(a)=te^{ta}$ 이다.

또한 직선의 기울기 정의로부터 기울기가 $\dfrac{e^{ta}}{a}$ 이다. 즉 $te^{ta}=\dfrac{1}{a}e^{ta}$ 이다.

따라서 $a=\dfrac{1}{t}$ 즉 접점은 $(\dfrac{1}{t}, e)$이 된다.

이제 접점 $(\dfrac{1}{t}, e)$에서 법선의 식을 구하면 $y-e=-\dfrac{1}{et}(x-\dfrac{1}{t})$ 이다.

점 B의 x좌표를 구하기 위해서 $y=0$을 대입하면 $x=e^2t+\dfrac{1}{t}$.

따라서 $\triangle AOB$의 넓이 $S=S(t)=\dfrac{e}{2}(e^2t+\dfrac{1}{t})$

$S'(t)=\dfrac{e}{2}(e^2-\dfrac{1}{t^2})$ 이므로 임계점은 $t=\dfrac{1}{e}$ (>0)

$S''(t)=\dfrac{e}{t^3}>0$ $(\because t>0)$ 이므로 $t=\dfrac{1}{e}$에서 극소이며 최소이다.

$\therefore t=\dfrac{1}{e}$