2013년 일반수학 1 기말고사 답안지

1. $\frac{3}{4}\pi$

2. $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$

3. $6-2e$

4. $\frac{1}{4}(\tan^2 x+1)(2\ln(\sec x)-1)-\frac{1}{2}(\ln(\sec x))^2+C$

   또는 $\frac{1}{4}(\sec^2 x)(2\ln(\sec x)-1)-\frac{1}{2}(\ln(\sec x))^2+C$

5. 수렴: $p< -1$, 발산: $p \geq -1$

6. $\frac{1}{4}ln3-\frac{1}{2}$

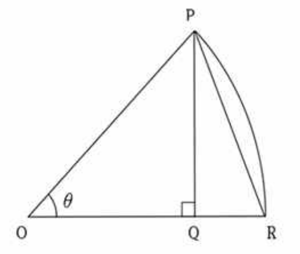
7. 조건수렴

8. $-\frac{7}{81}$

9. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

10. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, 또는 $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$

11. 중심이 O이고 중심각이 θ인 부채꼴이 있다. $A(\theta)$가 현PR과 호PR 사이의 영역이라 하고 $B(\theta)$를 삼각형 PQR의 넓이라고 할 때 $\lim_{\theta\to 0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}$를 구하여라.



풀이)

부채꼴POR의 넓이$=\frac{1}{2}\theta r^2$

$\triangle POR$의 넓이$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta$ 이다.

따라서 $A(\theta)=\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$.

$\overline{PQ}=r\sin\theta$, $\overline{OQ}=r\cos\theta$로부터

$\triangle POQ=\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$ 이다.

따라서 $B(\theta)=\triangle POR-\triangle POQ$

$$=\frac{1}{2}r^2\sin\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta-\sin\theta}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)+\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{-\sin\theta+4(\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{1}{3}$$

12. 극한값 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^{-1}x - P(x)}{x^8} = \frac{2}{3}$을 만족하는 최소차수의 다항식 $P(x)$에 대해 $P(1)$의 값을 구하여라.

풀이

$\tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \cdots$이므로

$P(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^8$

이다. 따라서 $P(1) = \frac{2}{35}$이다.

13. 부정적분 $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$을 구하여라.

풀이)

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx$$

I) $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = 2\sqrt{u}+c = 2\sqrt{x^2+2x+26}+c$ $(u = x^2+2x+26)$

II) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+25}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+25}}\,du$

치환: $u = 5\tan t$, $du = 5\sec^2 t\,dt$, $\sqrt{u^2+25} = \sqrt{25(\tan^2 t+1)} = 5\sec t$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+25}}\,du = \int \frac{5\sec^2 t}{5\sec t}\,dt = \int \sec t\,dt = \ln|\sec t + \tan t| + c$$

$$\left(\tan t = \frac{u}{5},\ \cos t = \frac{5}{\sqrt{u^2+25}} = \frac{1}{\sec t}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{u^2+25}}{5} + \frac{u}{5}\right) + c = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+26}+x+1}{5}\right) + c$$

따라서

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx = 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+26}+x+1}{5}\right) + c$$

또는 $= 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2\ln\left(\sqrt{x^2+2x+26}+x+1\right) + k$

(참고: $\sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{5}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+26}+x+1}{5}\right)$)

14. 부등식 $\ln(n) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln(n)$,(n:자연수)을 이용하여 다음 급수의 수렴 및 발산을 판정하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

풀이)

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln n$ 이므로

$\frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1 + \ln n}{n^2}$

한편 $\ln n \le \sqrt{n}$ 이므로

$\frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1 + \ln n}{n^2} \le \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n}}{n^2} = \frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}$

여기서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 는 $p > 1$인 p급수이므로 수렴한다.

그러므로 비교판정법에 의하여

양항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ 는 수렴한다.

15. 개구간 $(-2,2)$ 에서 정의된 함수 $f(x)=\int_0^x \frac{t}{(t+2)(t+3)}dt$ 의 매클로린 급수가 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$일 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n a_n$을 값을 구하여라.

풀이:
함수 $f(x)=\int_0^x \frac{t}{(t+2)(t+3)}dt=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 를 (항별)미분하면
$f'(x)=\frac{x}{(x+2)(x+3)}=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$을 얻는다.
양변에 x를 곱하면 $xf'(x)=\frac{x^2}{(x+2)(x+3)}=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$을 얻고
위 식의 양변에 $x=-1$을 대입하면 주어진 급수의 값은 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n a_n=\frac{1}{2}$이 된다.

다른 풀이(직접적인 계산):
피적분함수의 부분분수형이 $\frac{t}{(t+2)(t+3)}=\frac{-2}{t+2}+\frac{3}{t+3}$이므로
$f(x)=-2\ln(2+x)+3\ln(3+x)+2\ln2-3\ln3$을 얻는다.
 다음과 같이 두 (자연) 로그 함수의 매클로린 급수는
$\ln(2+x)=\ln2+\ln(1+\frac{x}{2})=\ln2+\sum_{n=1}(-1)^{(n-1)}\frac{1}{n2^n}x^n$
$\ln3+x)=\ln3+\ln(1+\frac{x}{3})=\ln3+\sum_{n=1}(-1)^{(n-1)}\frac{1}{n3^n}x^n$이므로
함수 $f(x)=\sum_{n=1}((-1)^n\frac{1}{n2^{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n3^{n-1}})x^n$을 얻는다.
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$이다.