2013년 일반수학 2 기말고사 답안지

1-10번

1. (-1, 2) 와 (-1, -2)
2. $\frac{33\sqrt{33}-1}{15}$
3. $\langle -9xyz^2,\ -2x+x^2y,\ 3yz^3-x^2z \rangle$, 0
4. 4π
5. $\frac{\pi^3-\pi\sin(\pi^2)}{2}$
6. $\frac{\pi^2}{8}$
7. $a=0, b=\frac{\pi}{2}, c=0, d=1, e=r^2, f=r, g=zr^2\cos\theta$
8. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)$
9. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$
10. $x^2y-3xyz+2z^3+c$ (c 없으면 3점)

11. 삼차원 공간에서 곡면 $x^2+y^2+z^2=\sqrt{x^2+y^2}$ 으로 둘러싸이는 입체 T의 부피를 구면좌표계에서의 삼중적분을 이용하여 구하시오.

풀이.

주어진 곡면을 구면좌표로 나타내면
$\rho=\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi)$이다.

그러므로 입체 T를 구면좌표로 나타내면

$$0\le\varphi\le\pi,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\rho\le\sin\varphi$$

이다. 따라서

$$\text{부피} = \iiint_T 1\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\sin\varphi}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{3}(\sin\varphi)^4\,d\varphi\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}(\sin\varphi)^4\,d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos(2\varphi)+\frac{1}{8}\cos(4\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{4}$$

12. 삼차원 공간에서 원통 입체 $T=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2\}$의 겉면(경계면)을 S 라 하자. S 의 외향단위법선 벡터를 $\vec{n}$ 이라 할 때, S 를 통한 벡터장 $F(x,y,z)=\langle x^2,\ 2y,\ 4z^2\rangle$의 유량(flux) $\iint_S F\cdot\vec{n}\,dS$ 을 구하시오.

(풀이) 발산정리를 이용하면

$$\iint_S F\cdot n\,dS = \iiint_T \nabla\cdot F\,dV = \iiint_T (2x+2+8z)\,dV$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 4}\int_0^2 (2x+2+8z)\,dz\,dA$$
$$= \iint_{x^2+y^2\le 4} (4x+20)\,dA$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4r\cos\theta+20)\,r\,dr\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{2\pi}\int_0^2 (r^2\cos\theta+5r)\,dr\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{2\pi}\left(\frac{8}{3}\cos\theta+10\right)d\theta = 80\pi$$

13.삼각형ABC의 세 내각을 x, y, z라고 할 때, 라그랑즈 승수법을 이용하여 함수 $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$ 의 최댓값을 구하시오.

(풀이)

제약조건 $x+y+z-\pi=0$에서 $g(x,y,z)=x+y+z-\pi$라 두고, 주어진 함수를 $f(,y,z)=\sin x \sin y \sin z$라고 두면 $\nabla f = (\cos x sin y \sin z, \sin x cos y \sin z, \sin x \sin y \cos z)$ $\nabla g = (1,1,1)$을 얻는다. 라그랑즈 승수법에 의해 적당한 실수 λ에 대해 $\nabla f = \lambda \nabla g$을 만족하므로 다음의 식을 구한다.

즉 $\cos x sin y \sin z = \lambda$--①; $\sin x cos y \sin z = \lambda$--②; $\sin x \sin y cos z = \lambda$--③.

먼저 $\lambda \neq 0$임을 확인하자. 만약 $\lambda = 0$이면 $0 < \sin x, \sin y, \sin z < 1$이므로 위 세 식으로부터 $\cos x = \cos y = \cos z = 0$을 얻고 이로부터 $x=y=z=\frac{\pi}{2}$을 얻어 $x+y+z=\pi$에 모순이 된다.

이제$\lambda \neq 0$을 이용하여 위 세 식으로부터 각각 $\cos x \neq 0, \cos y \neq 0, \cos z \neq 0$임을 알 수 있다.

식① 과②으로부터 $\tan x = \tan y$을 얻고, 식②와 ③으로부터 $\tan y = \tan z$을 얻어 우리는 $\tan x = \tan y = \tan z$임을 알 수 있다. 이 관계로부터 $x=y=z=\frac{\pi}{3}$임을 보이자.

$x+y+z=\pi, 0<x,y,z<\pi$이므로 이 tan값은 음수가 될 수 없으므로 x,y,z 모두 예각이고 이 범위에서 tan 함수는 일대일 함수이므로 $x=y=z$을 구한다. 따라서 $x=y=z=\frac{\pi}{3}$을 얻어 구하는 최댓값은 $f(\frac{\pi}{3,}\frac{\pi}{3,}\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} sin\frac{\pi}{3} sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$이다.

14. 다음 선적분 $\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y(xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy$을 구하시오. 여기서 C는 중심이 원점이고 반지름이 1인 반시계방향의 원이다.

풀) 곡선 C는, $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(\theta \le t \le \theta+2\pi)$로 매개화된다.
또한 $dx = -\sin t\,dt$, $dy=\cos t\,dt$이므로, 준식은
$\int_{\theta}^{\theta+2\pi} -\sin t + \sin t[\sin t\cos t + \ln(\cos t + 1)]\cos t\,dt$가 된다.
이것을 계산하면, $\pi/4$를 얻는다.

참고) 선적분의 내부영역에 정의되지 않는 점이 있으므로, Green 정리는 쓸 수 없다.

15. yz 평면상의 평면곡선 $z=y$ $(z \ge 0)$를 z-축을 중심으로 회전하여 얻은 공간곡면을 S_1이라 하자.

(1) 곡면 $S=\left\{(x,y,z) \in S_1 \mid x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2\right\}$, $(a>0)$ 를 구면좌표를 이용하여 매개변수식 $\vec{r}(\rho,\theta)=\langle x(\rho,\theta), y(\rho,\theta), z(\rho,\theta)\rangle$으로 나타내시오.

(2) 곡면적분 $\iint_S z\, dS$를 구하시오.

(풀이)

(1) $S_1 : z=\sqrt{x^2+y^2}$ 이므로 $\phi=\dfrac{\pi}{4}$이다.

따라서 $x=\rho\sin\phi\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta$

$y=\rho\sin\phi\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta$

$z=\rho\cos\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho$

즉, $\vec{r}(\rho,\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho\rangle$, $\quad 0 \le \rho \le 2a\cos\phi=\sqrt{2}\,a,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

(2) $\vec{r}_\rho=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle\cos\theta\ ,\ \sin\theta,\ 1\rangle$

$\times\ \vec{r}_\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle-\rho\sin\theta,\ \rho\cos\theta,\ 0\rangle$

$=\dfrac{1}{2}\ \langle-\rho\cos\theta,\ -\rho\sin\theta,\ \rho\rangle$

이므로 $\left|\vec{r}_\rho\times\vec{r}_\theta\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\rho^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\rho$ 이다.

따라서,

$\iint_S f\, dS=$

$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}a}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin\theta, \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\, d\theta d\rho$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^{\sqrt{2}a}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho^2 d\theta\, d\rho \\
&=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\rho^2\, d\theta\, d\rho \\
&=\pi\left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{\sqrt{2}a}=\frac{\pi}{3}2^{3/2}a^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3\pi
\end{aligned}
$$