2013 일반수학 2 중간고사 답안지

단답형

1. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $(0,0)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ 혹은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$. 단 원점은 $(0, \theta)$(θ는 임의의 실수)라고 써도 무방함.

2. $\frac{35}{3}$

3. $y = -\pi x - 1$ or $y = -\pi(x + \frac{1}{\pi})$

4. $\sqrt{168}$ or $2\sqrt{42}$

5. $z = \frac{3}{2}$, $\sqrt{x^2+y^2} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ or $z = \frac{3}{2}$, $x^2+y^2 = \frac{27}{4}$

6. $g_u(0,0) = 7$, $g_v(0,0) = 2$

7. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - yze^{xyz}}{xye^{xyz} - 2z}$ 혹은 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yze^{xyz} - 2x}{2z - xye^{xyz}}$

8. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

9. $\frac{\sqrt{13}}{13}$ 혹은 $\frac{1}{\sqrt{13}}$

10. $\pi - 4\sqrt{2} + 8$

11. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^3-x^3y}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ 일 때

편도함수의 정의에 의해 $f_x(0,y)$, $f_y(x,0)$, $f_{xy}(0,0)$과 $f_{yx}(0,0)$를 구하여라.

풀이)

$$f_x(0,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{hy^3-h^3y}{h^2+y^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{y(y^2-h^2)}{h^2+y^2}=y \text{ 이고 } f_x(0,0)=0.$$

$$f_y(x,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(x,0+k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{\dfrac{xk^3-x^3k}{x^2+k^2}-0}{k}$$

$$=\lim_{k\to0}\frac{x(k^2-x^2)}{x^2+k^2}=-x \text{ 이고 } f_y(0,0)=0$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f_x(0,0+k)-f_x(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{k-0}{k}=1.$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(0+h,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{-h-0}{h}=-1.$$

12. 두 직선 l_1: $x=y=z$ 와 l_2: $x+1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 사이의 거리를 구하시오.

(풀이)

직선 l_1 의 방향벡터 $\overrightarrow{v_1}=<1,1,1>$ 이고

직선 l_2 의 방향벡터 $\overrightarrow{v_2}=<1,2,3>$ 이므로

평행하지 않으며 또한, 두 직선의 교점이 없다.

즉, 두 직선은 꼬인 위치에 있다.

따라서 두 직선사이의 거리는

직선 l_1 위의 한 점을 $P_1=(1,1,1)$,

직선 l_2 위의 한 점을 $P_2=(-1,0,0)$라 할 때,

벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}=<-2,-1,-1>$ 를

두 직선 l_1, l_2 에 서로 수직인

벡터 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=<1,-2,1>$

방향으로의 정사영 벡터의 크기가 된다.

따라서 두 직선사이의 거리

$$D=|comp_n \overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$ 이다.

13. 함수 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-9xyz$ 와 변수 t에 대하여, 등식 $f(tx,ty,tz)=t^3f(x,y,z)$이 성립함을 확인하고, 위 성질과 연쇄법칙을 이용하여

$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=3f(x,y,z)$이 성립함을 보여라.

(풀이)

주어진 함수 f에 대하여

$f(tx,ty,tz)=t^3(x^3+y^3+z^3-9xyz)=t^3f(x,y,z)$이

성립한다.

$x_1=tx, y_1=ty, z_1=tz$,이라고 두고서,

식 $f(tx,ty,tz)=t^3f(x,y,z)$의 양변을 t에 관하여 미분하면 연쇄법칙에 의해

$\frac{\partial f(tx,ty,yz)}{\partial t}=x\frac{\partial f}{\partial x_1}+y\frac{\partial f}{\partial y_1}+z\frac{\partial f}{\partial z_1}=3t^2f(x,y,z)$을 얻는다.

양변에 $t=1$을 대입하면

$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=3f(x,y,z)$이 나온다.

언급사항:

연쇄법칙을 사용하지 않고 편미분을 구해서 직접적으로 계산할 수 있다. (점수 차감)

14. 극좌표로 표현된 곡선 $r=2+\sqrt{3}\cos\theta$의 내부와 곡선 $r=3-\sin\theta$의 외부에 놓인 영역의 넓이를 구하여라.

(풀이)

우선 교점을 구하기 위해

$2+\sqrt{3}\cos\theta=3-\sin\theta$를 푼다.

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$$

이므로 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ 이다.

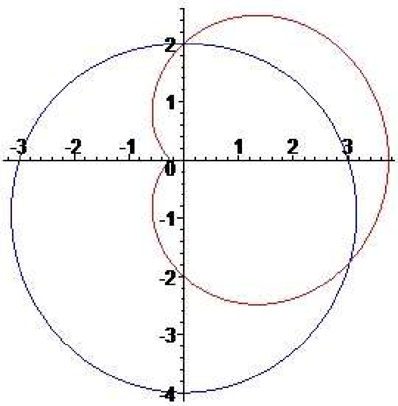
그러므로 $\theta=-\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이다. 그러므로 구하려는 넓이는

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\sqrt{3}\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta-\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(3-\sin\theta)^2\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-5+4\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta+3\cos^2\theta-\sin^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(-4+4\sqrt{3}\cos\theta+6\sin\theta+2\cos(2\theta))\,d\theta$$

$$=-\frac{4\pi}{3}+\frac{19}{4}\sqrt{3}$$



15. 곡면 $xyz=4$ 위의 한 점 $P(x_0, y_0, z_0)$에서 곡면에 접하는 접평면과 xy평면, yz평면, xz평면으로 둘러싸인 사면체의 부피를 구하여라. (단, $x_0, y_0, z_0 > 0$ 이다.)

(풀이) $F=xyz-4$ 라 하고, 점 $P(x_0,y_0,z_0)$에서 $F(x,y,z)=0$에 접하는 접평면의 방정식을 구하자.
$\nabla F = \langle yz, xz, xy \rangle$
이므로
$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = \langle y_0 z_0, x_0 z_0, x_0 y_0 \rangle$
이고 접평면의 방정식은
$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0$
이다. 점$P(x_0,y_0,z_0)$는 곡면 $F=0$ 위의 점이므로 한편,
$x_0 y_0 z_0 = 4$ 이다.
따라서, 접평면의 방정식을 다시 나타내면
$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 12$ 또는 $\dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} + \dfrac{z}{z_0} = 3$이다.
사면체는 $(0,0,0), (3x_0,0,0), (0,3y_0 0), (0,0,3z_0)$를 꼭지점으로 하는 사면체이다.
따라서 사면체의 부피는 $\dfrac{1}{6}(3x_0)(3y_0)(3z_0) = \dfrac{9}{2} x_0 y_0 z_0$
$= 18$

으로 점 P와 무관하게 항상 18이다