1. π

2. $\ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln 3$

3. $\frac{1}{2}x\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C$

4. $\frac{\pi + 2\ln 2}{8}$

5. $s > \frac{3}{2}$

6. $\alpha < \frac{1}{2}$

7. $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$

8. 수렴구간= $\left[0, \frac{2}{3}\right)$

9. $1 + 2x - \frac{8}{3}x^3$

10. $\frac{32\pi}{5}$

11. 부정적분 $\int \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\,d\theta$를 구하여라.

풀이: $\tan\frac{\theta}{2}=t$로 치환하면, $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\quad d\theta=\frac{2}{1+t^2}dt$.

적분 $= \int \frac{(1-t^2)/(1+t^2)}{1-(1-t^2)/(1+t^2)} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$

$= \int \frac{1-t^2}{t^2(1+t^2)}dt = \int \frac{1}{t^2}-\frac{2}{1+t^2}dt$

$= -\frac{1}{t}-2\arctan t + C = -\cot\frac{\theta}{2}-2\arctan(\tan\frac{\theta}{2})+C = -\cot\frac{\theta}{2}-\theta+C$

별해: $\tan\frac{\theta}{2}=t$로 두면, $\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$이고 따라서

$\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{(1-t^2)/(1+t^2)}{1-(1-t^2)/(1+t^2)}=\frac{1-t^2}{2t^2}=\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}cot^2\theta-\frac{1}{2}$

그러므로

적분 $= \int \frac{1}{2}cot^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}d\theta = \int \frac{1}{2}csc^2\frac{\theta}{2}-1d\theta = -\cot\frac{\theta}{2}-\theta+C$

별해2:

$\frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}=\frac{\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\cot\theta\csc\theta+\cot^2\theta$이므로

$\int \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}\,d\theta = \int \cot\theta\csc\theta+\cot^2\theta\,d\theta = -\csc\theta-\cot\theta-\theta+C$

12. $x>-1$에서 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t+1}\,dt$ 라고 하자. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$로 표현될 때, 계수 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$를 구하여라.

(풀이) $f'(x)=\frac{\sin x}{x+1}=x-x^2+\frac{5}{6}x^3-\frac{5}{6}x^4+\cdots$이므로, (아래 참고)

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = C+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{24}x^4-\frac{1}{6}x^5+\cdots.$

여기서 $f(0)=0$이므로, $C=0$.

따라서, $a_0=a_1=0,\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=-\frac{1}{3},\ a_4=\frac{5}{24}$

(참고) $f'(x)=\frac{\sin x}{x+1}=x-x^2+\frac{5}{6}x^3-\frac{5}{6}x^4+\cdots$은

$\sin x=(1+x)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$ 또는

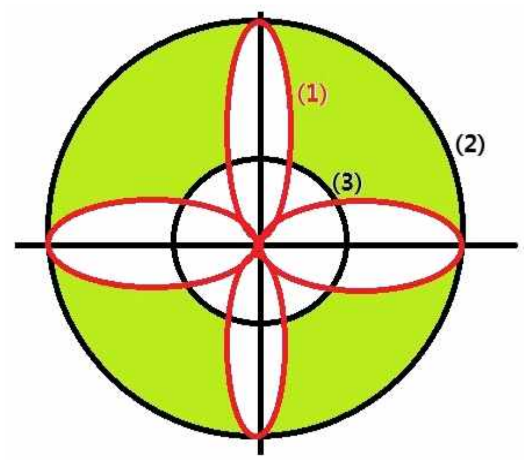
$\frac{\sin x}{x+1}=\sin x\cdot\frac{1}{1+x}=(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)(1-x+x^2-\cdots)$ 이용.

또는 직접 나누기로..

13. $r=2\cos 2\theta$의 외부, $r=2$의 내부 그리고 $r=1$의 외부의 공통인 부분의 넓이를 구하여라.

풀이:

(1) $r=2\cos 2\theta$
(2) $r=2$
(3) $r=1$로 이루어진 방정식이라고 하자.



우선, 식(1)의 외부와 (2)의 내부를
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 영역에서의 넓이를 구하면

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2^2-(2\cos 2\theta)^2 d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4-4\cos^2 2\theta d\theta, \qquad \cos^2 2\theta=\frac{1}{2}(\cos 4\theta+1)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2-2\cos 4\theta d\theta$$
$$=\left[\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}.$$

위에서 계산한 값에
식(1)의 외부와 (3)의 내부를 $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 일때의 영역의 넓이를
빼주면 된다.

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1-(2\cos 2\theta)^2 d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -1-2\cos 4\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

$\therefore$ 총 8영역이므로
$$8\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right]=\frac{7\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

14. 급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \ln n}{n^2}$ 의 수렴여부를 판정하여라.

풀이. $-1 \le \cos n \le 1$ 이므로 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos n \cdot \ln n}{n^2} \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 이다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ 이고 $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 은 $x \ge 2$ 에서 양수이다.

또한 $x \ge 2$ 에서 $f'(x) = \frac{n - 2n\ln n}{n^4} < 0$ 이므로 감소함수이다.

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx &= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{u}{e^u}du \qquad (\because \ln x = u) \\
&= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\ln 2}^{\alpha} \frac{u}{e^u}du \\
&= \lim_{\alpha\to\infty} \left[-ue^{-u} \right]_{\ln 2}^{\alpha} + \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\ln 2}^{\alpha} e^{-u}du \\
&= \lim_{\alpha\to\infty} \left(-\frac{u}{e^{\alpha}} + \frac{\ln 2}{2} \right) + \lim_{\alpha\to\infty} \left(-\frac{1}{e^{\alpha}} + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\ln 2 + 1}{2}
\end{aligned}$$

이므로 적분판정법에 의하여 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 이 수렴한다.

따라서 비교판정법에 의하여 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos n \cdot \ln n}{n^2} \right|$ 이 수렴하고

절대수렴 판정법에 의하여 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \ln n}{n^2}$ 이 수렴한다.

15. (1) 양의 상수 a, b $(0 < a < b)$에 대해 $\int \frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} d\theta$를 구하여라.

풀이) 분자와 분모를 $\cos^2\theta$로 나누자. $\tan\theta = t$라 하면, $\sec^2\theta\, d\theta = dt$이므로 아래식을 얻는다.

$$\int \frac{\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta + b^2} d\theta = \int \frac{dt}{a^2t^2 + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{t^2 + (b/a)^2} dt$$
$$= \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}t\right) + c = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right) + c$$

답 : $\int \frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} d\theta = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right) + c$

(2) 두 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$의 1사분면에서의 공통 내부의 면적 S를 구하여라.

풀이) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$에 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$를 대입해 정리하면, $r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$를 얻는다. 또, 문제의 두 타원은 $y = x$에 대해 대칭임을 이용하여 문제를 풀자. 그러면, 구하는 면적은

$S = 2\int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} d\theta$이므로 (1)로부터 아래식을 얻는다

$$S = a^2b^2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} d\theta = ab\left[\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\tan\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= ab\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

답: $S = ab\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$