1. e^{-2}

2. $y = x + 1$

3. $\frac{26}{27}$

4. 4.02

5. $\sqrt{2}$

6. $\frac{\ln 4 + (\ln 2)^2}{2}$

7. $\frac{\pi}{2}$

8. $\frac{17}{12}$

9. $\frac{\sin 2}{\sqrt{2}}$

10. $2\tan\left(e^{\sqrt{x}} + 1\right) + C$

11. $x \geqq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 다음의 식이 성립함을 보여라.

$$\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}\ .$$

(풀이) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right), \quad g(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$ 라 하면

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = g'(x)$ 이다. 따라서 두 함수는 상수만큼 차이가 난다.

$\sin^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$ 에서 $x = 1$ 을 양변에 대입하면

$\sin^{-1}0 = 2\tan^{-1}1 + C$ 에서 $C = -\dfrac{\pi}{2}$ 를 얻는다.

12. 다음 곡선을 x-축을 중심으로 회전시켜 얻은 회전곡면의 겉넓이를 구하여라.

$$\begin{cases} x = 2(\theta - \sin\theta) \\ y = 2(1-\cos\theta) \end{cases}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

(풀이) $ds = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$$= \sqrt{(2(1-\cos\theta))^2 + (2\sin\theta)^2}\, d\theta$$
$$= \sqrt{8(1-\cos\theta)}\, d\theta$$
$$= 4\sin\frac{\theta}{2} d\theta$$

이고, 구하려는 회전곡면의 넓이 S는 $\displaystyle\int 2\pi y\, ds$ 이므로,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_0^{2\pi} 2(1-\cos\theta)\cdot 4\sin\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{2\pi} 4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot 4\sin\frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 32\pi\int_0^{2\pi} (1-\cos^2\frac{\theta}{2})\cdot \sin\frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

$t = \cos\dfrac{\theta}{2}$ 로 치환하면, $dt = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\theta}{2} d\theta$ 이고,

$$\begin{aligned} S &= 32\pi\int_1^{-1} (1-t^2)\cdot(-2)\, dt \\ &= \frac{256}{3}\pi. \end{aligned}$$

13. $f(x)=x^n \ln x$의 $(n+1)$차 도함수를 귀납법을 이용하여 $\dfrac{n!}{x}$임을 보여라.

(풀이)

$n=1$일때 :
$f=x\ln x$일때 2차 도함수를 구하면
$f'=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1$
$f''=\dfrac{1}{x}$이다.

$n=k$일때 :
$f=x^k\ln x$의 $(k+1)$차 도함수가
$f^{(k+1)}=\dfrac{k!}{x}$라고 하자.

$n=k+1$일때 :
$f=x^{(k+1)}\ln x$의 $(k+2)$차 도함수는
$f^{(k+2)}=\dfrac{(k+1)!}{x}$임을 보이면 된다.

$$f'=\frac{df}{dx}=(x^{k+1}\ln x)'$$
$$=(k+1)x^k\ln x+x^k$$

$$f^{(k+2)}=\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{df}{dx}\right)$$
$$=\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left((k+1)x^k\ln x+x^k\right)$$

$n=k$일때 $f^{(k+1)}=\dfrac{k!}{x}$이므로

$$=(k+1)\frac{k!}{x}+\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(x^k\right)$$
$$=\frac{(k+1)!}{x}$$이다.

14. 함수 $f(x)=1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}$의 절편, 증가 감소 구간, 극값, 볼록성, 변곡점, 점근선을 구하고 그래프를 그려라.

(풀이) x 절편=3.

점근선: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)=1$이므로, $x=0, y=1$이다.

증가, 감소 구간: $f'(x)=\frac{6(x-3)}{x^3}$이므로 증가 구간은 $(-\infty,0),(3,\infty)$이고
감소 구간은 (0, 3)이다. 그러므로 극솟값은 $f(3)=0$이다.

오목, 볼록: $f''(x)=\frac{-6(2x-9)}{x^4}$이므로 아래 볼록 구간은 $(-\infty,0),(0,\frac{9}{2})$이고
위로 볼록 구간은 $(\frac{9}{2},\infty)$이다. 그러므로 변곡점은 $(\frac{9}{2},\frac{1}{9})$이다.

15. (i) 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x\cos x}$ 가 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 에서 증가함수임을 보이고,
이를 이용하여

(ii) $\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<x_3<\pi$ 인 세 실수 x_1, x_2, x_3 에 대하여

$$\frac{\ln x_2-\ln x_1}{\sin x_2-\sin x_1}\le\frac{\ln x_3-\ln x_2}{\sin x_3-\sin x_2}$$

임을 보여라.

(풀이) (i) $f'(x)=\dfrac{x\sin x-\cos x}{x^2\cos^2 x}$ 이고 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 에서 $\sin x>0$, $-\cos x>0$ 이므로 $f'(x)>0$ 이다. 따라서, $f(x)$ 는 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 에서 증가함수이다.

(ii) $y=\ln x$ 와 $y=\sin x$ 는 모두 미분가능한 함수이므로 $\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<x_3<\pi$ 인 세 실수 x_1, x_2, x_3 에 대하여 코시의 평균값의 정리에 의해

$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\sin x_2-\sin x_1}=\dfrac{1}{c_1\cos c_1}$ 인 c_1이 x_1 과 x_2 사이에 적어도 하나 존재하고,

$\dfrac{\ln x_3-\ln x_2}{\sin x_3-\sin x_2}=\dfrac{1}{c_2\cos c_2}$ 인 c_2이 x_2 과 x_3 사이에 적어도 하나 존재하고, $f(x)$ 는 구간 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 에서 증가이고 $c_1<c_2$ 이므로 $\dfrac{1}{c_1\cos c_1}\le\dfrac{1}{c_2\cos c_2}$ 이다. 따라서,

$\dfrac{\ln x_2-\ln x_1}{\sin x_2-\sin x_1}\le\dfrac{\ln x_3-\ln x_2}{\sin x_3-\sin x_2}$ 이다.