1. $1-\cos 1$

2. $\frac{3\pi}{32}$

3. $4\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 혹은 이것을 변형한 식 : $4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $4-2\sqrt{2}$, $\frac{8-4\sqrt{2}}{2}$ 등등

4. $A=2\pi/3$, $B=-2\cos\phi$, $C=\rho^2\sin\phi$.

5. $\frac{\pi}{6}\left(37\sqrt{37}-1\right)$

6. $\frac{16}{3}$

7. $< 2y, 2x+2z, ye^{xy}\cos y-x^2 > \; = 2y\boldsymbol{i}+(2x+2z)\boldsymbol{j}+(ye^{xy}\cos y-x^2)\boldsymbol{k}$

8. $\frac{3}{2}$

9. $\frac{8}{3}$

10. $\frac{5\pi}{4}$

11. $y=\sqrt{x}$를 x축회전하여얻은포물면과 평면 $y=\frac{1}{2}x$로둘러싸인 영역 T의 부피를 구하여라.

풀이: $y=\sqrt{x}$를 x축회전하면

$f(x,\sqrt{y^2+z^2})=0 \Leftrightarrow x=y^2+z^2$ 된다.

$x=2y$와의 교점을 구하면
$2y=y^2+z^2$
$y^2-2y=z^2$
$(y-1)^2+z^2=1$된다.

구면좌표 $y=rcos\theta, z=rsin\theta$로 바꾸면 $r=2\cos\theta$ 된다.

$$\iint_{D=(y,z)|(y-1)^2+z^2=1}\int_{y^2+z^2}^{2y} dx\,dy\,dz$$
$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\theta}(2rcos\theta-r^2)rdrd\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\left[\frac{2}{3}r^3\cos\theta-\frac{1}{4}r^4\right]_{r=2\cos\theta}d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{4}{3}cos^4\theta\,d\theta \qquad (*1\text{에 의해 다음과같다})$$
$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\left(\frac{\cos4\theta+1}{2}+1+2\cos2\theta\right)d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

(*1)
$$\cos^2\theta=\frac{\cos2\theta+1}{2},\ \cos^2 2\theta=\frac{\cos4\theta+1}{2}$$
$$\cos^4\theta=\frac{1}{4}\left(\cos^2 2\theta+1+2\cos2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\cos4\theta+1}{2}+1+2\cos2\theta\right)$$

12. 3차원 공간 $\boldsymbol{R}^{3}$에서 정의된 벡터장
$F(x,y,z) = x(x^2+y^2+z^2)\boldsymbol{i} + y(x^2+y^2+z^2)\boldsymbol{j} + z(x^2+y^2+z^2)\boldsymbol{k}$는 보존적임을 보이고,
F의 퍼텐셜 함수를 구하여라.
또한 매개변수곡선 $C(t) = (t, t^2, t^3)$, $(0 \le t \le 1)$에 따른 선적분 $\int_C F \cdot T\,ds$을 구하여라.

풀이:
1-a) 벡터장 $\boldsymbol{F}$의 정의역이 볼록영역이므로 $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0} = (0,0,0)$임을 보이면 된다. $\nabla \times \boldsymbol{F}$의 정의의 의해 x, y, z의 성분을 각각 구하면 $R_y - Q_z = 2yz - 2yz = 0$,
$P_z - R_x = 2xz - 2xz = 0$, $Q_x - P_y = 2xy - 2xy = 0$이다. 따라서 $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0} = (0,0,0)$이다.

1-b) $\boldsymbol{F} = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$이므로
$f_x = x(x^2+y^2+z^2)$--① $f_y = y(x^2+y^2+z^2)$--② $f_z = z(x^2+y^2+z^2)$--③이다.
①으로부터 $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(y^2+z^2)x^2 + \phi(y,z)$--④을 얻고 식④를 y로 편미분하여 ②와 같게 놓으면 $x^2y + \phi_y = y(x^2+y^2+z^2)$으로부터 $\phi_y = y(y^2+z^2)$을 얻고 이로부터 $\phi(y,z) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + \psi(z)$을 얻는다.
즉 $f(x,y,z) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}(y^2+z^2)x^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}y^2z^2 + \psi(z)$--⑤을 얻고 이를 z로 편미분하여 ③과 같게 놓으면 $z(x^2+y^2) + \psi'(z) = z(x^2+y^2+z^2)$을 얻고 이로부터 $\psi(z) = \frac{1}{4}z^4 + C$을 얻는다.
따라서 $f(x,y,z) = \frac{1}{4}(x^4+y^4+z^4) + \frac{1}{2}(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) + C = \frac{1}{4}(x^2+y^2+z^2)^2 + C$

1-c) 주어진 선적분은 경로에 무관하므로 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}ds = f(1,1,1) - f(0,0,0) = \frac{9}{4}$이다.

13. 곡면 S가 구면 $x^2+y^2+z^2=1$의 제1팔분원일 때, 곡면 적분 $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$를 구하여라.

풀이) $\boldsymbol{r}(\phi,\theta)=(\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$는

$R=\left\{(\phi,\theta) : 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$에서 S로 가는 곡면 S의 매개변수식이고

$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| = \sin\phi$이다.

따라서

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS = \iint_R (\sin^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta)\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \phi}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\right| d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi\, d\phi d\theta = \frac{\pi}{3}$$

14. 곡선 C 가 원기둥 $x^2+y^2=4$ 와 반구 $x^2+y^2+z^2=16$, $z \geq 0$ 가 만나는 곡선이라고 하고 벡터장 $F=<x^2y^3, 1, z>$ 라 하자. 이 때, 위에서 볼 때 반시계 방향의 C를 따라서 $\int_C F \cdot T\,ds$ 를 Stokes **정리**를 이용하여 구하여라. (단, T 는 반시계 방향으로의 C의 단위접선벡터)

(풀이) 곡선 C 는 곡면 $S=\left\{(x,y,z) : z=\sqrt{16-x^2-y^2},\, x^2+y^2 \leq 4\right\}$의 경계이다. Stokes 정리에 의해 $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\,ds = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ 가 성립한다. 여기서, $\boldsymbol{n}$는 S의 외향단위법선벡터이다. 주어진 곡면 S의 매개변수식을 구하면

$$R=\left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\right\}$$
$$\boldsymbol{r}: R \to S,$$
$$\boldsymbol{r}(x,y)=<x,y,\sqrt{16-x^2-y^2}>$$

이고 $\nabla \times \boldsymbol{F}=<0,0,-3x^2y^2>$

따라서, $\boldsymbol{r_x}=<1,0,-\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}>$, $\boldsymbol{r_y}=<0,1,-\dfrac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}>$

이므로 $\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y=<\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}},1>$ 이고

$\|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_y\|=\dfrac{16}{16-x^2-y^2}$ 이다.

따라서, $$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\,ds = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS$$
$$=\iint_R -3x^2y^2dxdy=-3\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^5\cos^2\theta\sin^2\theta\,dr\,d\theta=-8\pi$$

15. 곡면 S는 원기둥면 $x^2+y^2=1$, $-1 \le z \le 1$이라 하고, $\boldsymbol{n}$을 곡면 S의 외향 단위법선 벡터라 하자. 이 때 곡면 S를 통한 벡터장 $F(x,y,z)=\langle x^3, x^2y, \tan^{-1}z \rangle$의 유량 $\iint_S F \cdot \boldsymbol{n}\, dS$를 구하여라.

<풀이> 곡면 S를 다음과 같이 매개화 하자.

$\vec{r}(\theta,z)=\langle \cos\theta, \sin\theta, z\rangle$, $R: 0 \le \theta \le 2\pi$, $-1 \le z \le 1$.

$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z = \langle \cos\theta, \sin\theta, 0\rangle$이고 $\theta=0$일 때 $<1,0,0>$이므로 문제에서 주어진 방향과 일치한다.

따라서

$$
\begin{aligned}
\iint_S F \cdot \boldsymbol{n}\, dS &= \iint_R (\cos^4\theta + \cos^2\theta \sin^2\theta) \cdot 1 d\theta\, dz \\
&= \iint_R \cos^2\theta\, d\theta\, dz \\
&= 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta)\, d\theta = 2\pi
\end{aligned}
$$