1. (1),(2),(4)

2. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$

3. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

4. $x+3y-2\sqrt{2}z=0$

5. $-1$

6. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{2}=z-2$

7. $\dfrac{8}{3}$

8. $\dfrac{4}{3}a^2b\pi$

9. $2$

10. $k<1,-1,2>$ $(k>0)$

11. 점 $P(2,-1,1)$ 를 지나고 평면 $\alpha : 3x-2y+2z=5$ 에 수직인 직선을 $l$이라고 하자. 점 $A(-1,2,1)$ 에서 직선 $l$에 내린 수선의 발을 $B$, 점 $A$에서 평면 $\alpha$에 내린 수선의 발을 $C$ 라고 할 때, 삼각형 $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하여라.

(풀이) $\overline{AB}$ 는 점 $A$에서 직선 $l$까지 거리이고,
직선 $l$과 평행인 벡터 $v$는 평면 $\alpha$의 법선벡터 $<3,-2,2>$ 이므로,

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{|\overrightarrow{PA} \times v|}{|v|} \\ &= \frac{|<-3,3,0>\times<3,-2,2>|}{|<3,-2,2>|} \\ &= \frac{|<6,6,-3>|}{|<3,-2,2>|} = \frac{9}{\sqrt{17}}.\end{aligned}$$

또, $\overline{AC}$ 는 점 $A$에서 평면 $\alpha$까지 거리이므로,

$$\overline{AC} = \frac{|3\cdot(-1)-2\cdot2+2\cdot1-5|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{10}{\sqrt{17}}.$$

여기서, 평면 $\alpha$와 직선 $l$이 만나는 점을 $D$라고 하면, 사각형 $ABDC$ 는 직사각형이 되므로, 삼각형 $ABC$ 는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.
따라서 삼각형 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{\sqrt{17}}\cdot\frac{10}{\sqrt{17}} = \frac{45}{17}.$$

12. $w(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$일 때, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$임을 보여라.

(단, $f,g$는 2계도함수를 갖는 임의의 함수, $c$는 상수이다.)

(풀이)
$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}&=\frac{\partial f(x+ct)}{\partial x}+\frac{\partial g(x-ct)}{\partial x}\\&=\frac{df(x+ct)}{d(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}+\frac{dg(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}\\&=f'(x+ct)+g'(x-ct)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\frac{\partial f'(x+ct)}{\partial x}+\frac{\partial g'(x-ct)}{\partial x}\\&=\frac{df'(x+ct)}{d(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial x}+\frac{dg'(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}\\&=f''(x+ct)+g''(x-ct)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}&=\frac{\partial f(x+ct)}{\partial t}+\frac{\partial g(x-ct)}{\partial t}\\&=\frac{df(x+ct)}{d(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}+\frac{dg(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}\\&=cf'(x+ct)-cg'(x-ct)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}&=c\frac{\partial f'(x+ct)}{\partial t}-c\frac{\partial g'(x-ct)}{\partial t}\\&=c\frac{df'(x+ct)}{d(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}-c\frac{dg'(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}\\&=c^2f''(x+ct)+c^2g''(x-ct)\\&=c^2\{f''(x+ct)+g''(x-ct)\}\\&=c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{aligned}$$

13. 함수 $f(x,y)=\begin{cases} x^2\tan^{-1}\dfrac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\dfrac{x}{y} & : x\neq 0 \text{ and } y\neq 0 \\ 0 & : x=0 \ \text{ or } y=0 \end{cases}$ 일 때,

$f_x(0,y)\,(y\neq 0)$을 구하여라.

(풀이) $y\neq 0$이므로, $f_x(0,y)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2\tan^{-1}\dfrac{y}{h}-y^2\tan^{-1}\dfrac{h}{y}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}h\tan^{-1}\frac{y}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{y^2\tan^{-1}\dfrac{h}{y}}{h}$$ 이다.

그런데, $\left|\tan^{-1}\dfrac{y}{h}\right|<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $\lim\limits_{h\to 0}h\tan^{-1}\dfrac{y}{h}=0$이다.

한편, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y^2\tan^{-1}\dfrac{h}{y}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y^2\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\frac{h^2}{y^2}}}{1}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{y^3}{y^2+h^2}=y$이다.

$\therefore\ f_x(0,y)=-y$

14. 함수 $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ 의 $x^2 + y^2 \le 1$ 에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

**[풀이]** 임계점을 구하자.

$f_x = 2x$, $f_y = 4y$ 이므로 임계점은 $(0, 0)$.

경계를 따라 임계점을 구한다.

원주를 매개화하면 $x = \cos t$, $y = \sin t \, (-\pi < t \le \pi)$ 라 하면

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t + 2\sin^2 t = 1 + \sin^2 t$$

$$\frac{df}{dt} = 2\sin t \cos t = 0, \quad t = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$$

$$f(\pm 1, 0) = 1, \ f(0, \pm 1) = 2, \ f(0, 0) = 0.$$

따라서 최댓값은 2, 최솟값은 0이다.

15. 평면 $x+y+2z=2$ 는 포물면 $z=x^2+y^2$ 과 하나의 곡선에서 만난다. 원점에서 가장 가까운 곡선위의 점과 가장 먼 곡선위의 점을 구하여라.

(풀이) 두 개의 조건

$$g(x,y,z)=x+y+2z-2=0$$
$$h(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$$

하에서

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다. Lagrange 승수법에 의하여 다음의 식들을 구할 수 있다.

(1) $2x=\lambda+2\mu x$
(2) $2y=\lambda+2\mu y$
(3) $2z=2\lambda-\mu$
(4) $x+y+2z=2$
(5) $x^2+y^2=z$

(1)과 (2)로부터 $2(x-y)=2\mu(x-y)$ 을 얻는다. $x\neq y$ 이면 $\mu=1$ 이고 (1)에서 $\lambda=0$이다. (3)에서 $z=-\dfrac{1}{2}$ 를 얻는데, 이는 (5)에 의해 모순이다. 따라서 $x=y$ 이다.

다시 (4)와 (5)로부터 $x+z=1$, $2x^2=z$ 이므로

$2x^2+x-1=0 \Rightarrow (2x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x=y=-1,\ \dfrac{1}{2}$.

따라서 $(x,y,z)=(-1,-1,2)$, $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$. $f(-1,-1,2)=1+1+4=6$, $f(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})=\dfrac{3}{4}$ 이므로 $(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$이 원점에서 가장 가까운 곡선 위의 점이고 $(-1,-1,2)$ 이 원점에서 가장 먼 곡선 위의 점이다.