1. $\dfrac{27}{25}$

2. $\ln(1+\sqrt{2})$

3. $\dfrac{1}{2014}$

4. $2\sqrt{3}$

5. $a)$, $c)$

6. $\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$

7. $\dfrac{5}{6}$

8. $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}\pi}$

9. $\dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)$

10. $-2e^{-\pi/2}$

11. 부정적분

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \int x - 2 + \frac{4x + 2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

이다. 여기서,

$$\int \frac{4x}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{2}{x^2+1} + C_1$$

이고

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{2\sec^2\theta}{(\tan^2\theta + 1)^2} d\theta \quad (x = \tan\theta \text{ 로 치환}) \\ &= \int 2\cos^2\theta d\theta = \int 1 + \cos 2\theta d\theta \\ &= \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + C_2 = \theta + \sin\theta\cos\theta + C_2 \\ &= \arctan(x) + \frac{x}{x^2+1} + C_2 \end{aligned}$$

이므로,

$$\int \frac{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \arctan(x) + \frac{x-2}{x^2+1} + C$$

이다.

12. $u = \tan\dfrac{\theta}{2}$ 로 치환하면,

$$\sin\theta = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad d\theta = \frac{2}{1+u^2}du$$

이다.

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$일 때, $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고,

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$일 때, $u = 1$이므로

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{3+2\sin\theta-\cos\theta}d\theta &= \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{\left(3+2\cdot\dfrac{2u}{1+u^2}-\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+u^2}du \\
&= \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2}{4u^2+4u+2}du = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2}{(2u+1)^2+1}du \\
&= \arctan(2u+1)\Big|_{1/\sqrt{3}}^{1} \\
&= \arctan(3) - \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)
\end{aligned}$$

이다.

13.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x)-\ln(1-x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}\right]x^n
\end{aligned}$$

이므로

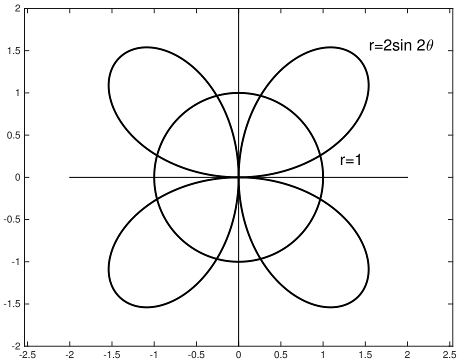
$$a_n = \begin{cases} 0 & n\text{은 짝수} \\ \dfrac{2}{n} & n\text{은 홀수} \end{cases}$$

이다.

$0 \le \left|\dfrac{a_n\sin(n)}{n}\right| \le \dfrac{2}{n^2}$ 이고, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$은 수렴하므로,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n\sin(n)}{n}\right|$은 수렴한다. (비교 판정법)

따라서, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_n\sin(n)}{n}\right|$이 수렴하므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin(n)}{n}$은 수렴한다.



14. (a)

(b) $2\sin 2\theta = 1$에서

1사분면에서 두 곡선이 만나는 교점의 θ는 $\dfrac{\pi}{12}$, $\dfrac{5\pi}{12}$이다.

따라서, 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
A &= 4\left[\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \frac{1}{2}(2\sin 2\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)\right] \\
&= 4\int_{\pi/12}^{5\pi/12} 2\sin^2(2\theta) d\theta - \frac{2\pi}{3} \\
&= 4\int_{\pi/12}^{5\pi/12} 1 - \cos(4\theta) d\theta - \frac{2\pi}{3} \\
&= 4\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right) - \sin(4\theta)\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} - \frac{2\pi}{3} \\
&= \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

이다.

15. $x'(t) = -\sin t + \csc t$,

$y'(t) = \cos t$ 이므로

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{\sin^2 t - 2 + \csc^2 t + \cos^2 t}\ \ dt = \sqrt{\csc^2 t - 1} dt \\ &= |\cot t| dt \end{aligned}$$

이다.

따라서, 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} s &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} |\cot t| dt \\ &= \ln|\sin t| \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= \ln(\sqrt{3}) \end{aligned}$$

이다.