1. $-\dfrac{1}{\pi^2}$

2. $\dfrac{1}{12\,(\ln 3)}\pi$

3. 2

4. 0.02

5. $\dfrac{1}{5}$

6. $\dfrac{1}{4}(\ln 3)^2$

7. $\dfrac{4k^2}{e^2}$

8. $\dfrac{1}{4}\left(e^2 - \dfrac{1}{e^2}\right)$

9. $\dfrac{67}{10}\pi$

10. $\pi\,(6\arctan 3 - \ln 10)$

11.

$$\frac{dg(x)}{dx} = 2\tan x \sec^2 x \ln(1+\tan^2 x)$$

이므로,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} 3\sec^2 x \frac{dg}{dx} dx &= 3\int_0^{\pi/4} 2\sec^2 x \tan x \sec^2 x \ln(1+\tan^2 x) dx \\ &= 3\int_0^{\pi/4} 2(1+\tan^2 x)\tan x \sec^2 x \ln(1+\tan^2 x) dx\end{aligned}$$

이다.

$t = 1+\tan^2 x$로 치환하면,

$x=0$일 때, $t=1$이고 $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $t=2$이며

주어진 정적분은

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} 3\sec^2 x \frac{dg}{dx}\, dx &= 3\int_1^2 t\ln t dt \\ &= 3\left(\frac{1}{2}t^2 \ln t\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t\ dt\right) \\ &= 3\left[\frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2\ dt\right]_1^2 \\ &= 6\ln 2 - \frac{9}{4}\end{aligned}$$

이다.

12.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2n\sin^{2n-1}x\cos x \\
f''(x) &= 2n(2n-1)\sin^{2n-2}x\cos^2 x - 2n\sin^{2n}x \\
&= 2n\sin^{2n-2}x\left[(2n-1)(1-\sin^2 x)-\sin^2 x\right] \\
&= 2n\sin^{2n-2}x\left[(2n-1)-2n\sin^2 x\right]
\end{aligned}
$$

이고, 변곡점의 x 좌표 a_n은 $f''(x)=0$를 만족한다. 따라서,

$$\sin^2(a_n) = \frac{2n-1}{2n} = 1-\frac{1}{2n}$$

이고,

$$f_n(a_n) = \left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$$

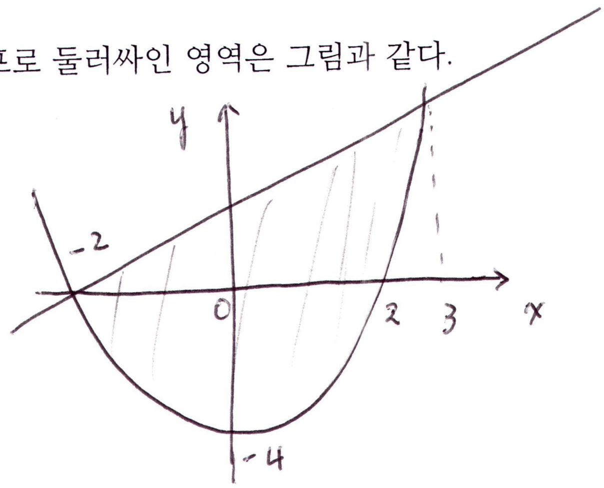
이다. 그러므로,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(a_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{-2n}\right]^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}}
\end{aligned}
$$

이다.

13. 두 그래프 $y = x^2 - 4$, $y = x + 2$가 만나는 점의 x좌표를 구하면 $x = -2, 3$이고,

두 그래프로 둘러싸인 영역은 그림과 같다.



구간 $(-2, 2)$ 에서 $|x^2 - 4|$ 와 $x + 2$의 크기를 비교하면,

$(x+2) - |x^2 - 4| = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$으로 부터

구간 $(-2,\ 1)$ 에서는 $x + 2 < |x^2 - 4|$ 이고,

구간 $(1,\ 2)$ 에서는 $x + 2 > |x^2 - 4|$ 이다.

따라서 둘러싸인 영역을 x-축 중심으로 회전한 회전체의 부피는

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{1} \pi(x^2-4)^2\ dx + \int_{1}^{3} \pi(x+2)^2\ dx - \int_{2}^{3} \pi(x^2-4)^2\ dx \\ &= \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{-2}^{1} + \pi\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_{1}^{3} - \pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x\right]_{2}^{3} \\ &= \pi\left(\frac{33}{5} - 24 + 48\right) + \pi\left(\frac{26}{3} + 16 + 8\right) - \pi\left(\frac{211}{5} - \frac{152}{3} + 16\right) \\ &= \frac{836}{15}\pi \end{aligned}$$

14. $x=1$에서 $\ln x = 0$ 이므로 정의역은 $\{x|x>0, x\neq 1\}$ 이다.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ 이므로,

증가 구간은 $(e,\ \infty)$,

감소구간은 $(0,\ 1)$, $(1,\ e)$ 이고,

$x = e$ 에서 극솟값 $e+1$을 갖는다.

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2-\ln x}{x(\ln x)^3}$ 이므로,

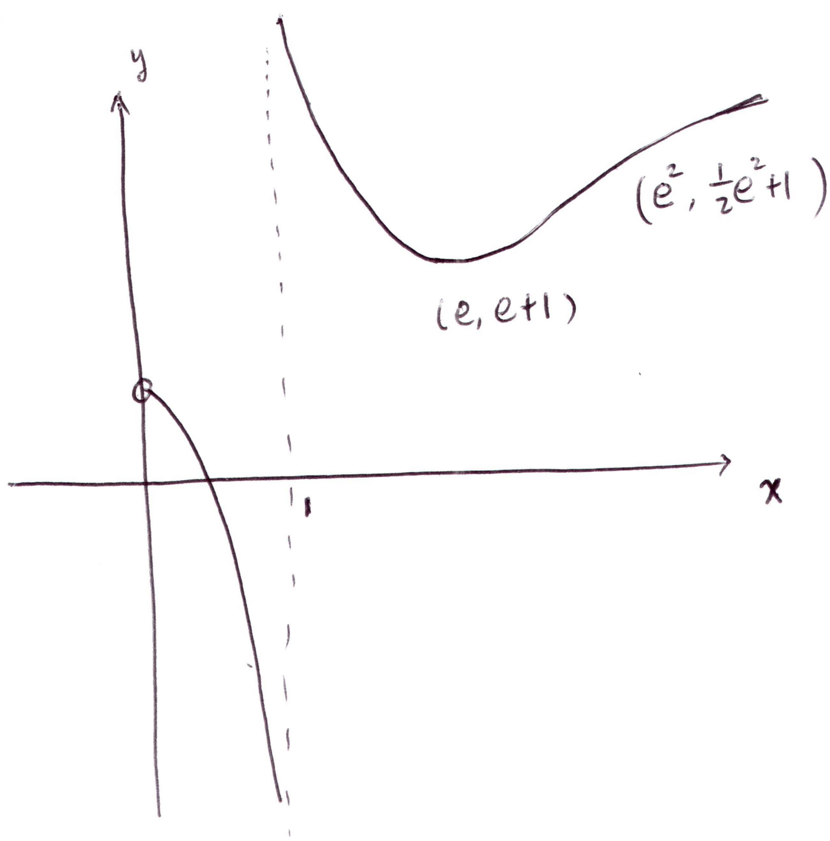
위로 볼록(아래로 오목)인 구간은 $(0,\ 1)$, $(e^2,\ \infty)$,

아래로 볼록(위로 오목)인 구간은 $(1,\ e^2)$ 이고,

변곡점은 $\left(e^2,\ \dfrac{1}{2}e^2+1\right)$ 이다.

$\lim\limits_{x\to 0+} y = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ 이고, $\lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} y = \infty$ 이므로,

수직 점근선 $x=1$을 가지며, 그래프는 다음과 같다.



15. 원뿔의 높이를 h, 윗면의 반지름을 a라 하면, 부피는

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

이다.

$$a^2 + h^2 = 5^2$$

이므로,

$$V = \frac{1}{3}\pi(25 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(25h - h^3)$$

이다.

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi(25 - 3h^2) = 0$$

에서 $h = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ 는 임계점의 h이다.

$V(0) = V(5) = 0$ 이고 $V\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{250\pi}{9\sqrt{3}}$이므로,

원뿔 부피의 최댓값은 $\dfrac{250\pi}{9\sqrt{3}}$ 이다.