1. $\ln 9 \ (= 2\ln 3)$

2. $\dfrac{17}{4}$

3. $\dfrac{\pi}{6}\left(27 - 5\sqrt{5}\right)$

4. $\dfrac{4}{5}$

5. $\dfrac{64}{9}\pi$

6. $< 4, 6, 8 >$

7. 20

8. 10

9. $4\sin 2 + 21$

10. -2

11. 직교좌표를 이용하면 부피는

$$V = \int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \int_0^{y/(x^2+y^2)} dzdydx$$

$\left(또는,\ V = \int_1^2 \int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \int_0^{y/(x^2+y^2)} dzdxdy, ... \right)$ 으로 표현된다.

그리고, $y = 1$을 주면좌표로 표현하면 $r = 1/\sin\theta$ 이고,

$x^2 + y^2 - 2y = 0$은 $r = 2\sin\theta$ 이므로,

주면좌표를 이용하여 부피를 계산하는 삼중적분은

$$V = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{1/\sin\theta}^{2\sin\theta} \int_0^{\sin\theta/r} rdzdrd\theta$$

으로 표현된다.

주면좌표를 표현된 식을 이용하여 부피를 구하면,

$$\begin{aligned} V &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{1/\sin\theta}^{2\sin\theta} \sin\theta\ drd\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\sin^2\theta - 1)\ d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} -\cos 2\theta\ d\theta = \left[-\frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다.

12. 회전 곡면을 매개변수로 표현하면,

$$\mathbf{r}\,(u,v) =< \sin u \cos v, u, \sin u \sin v > \qquad \left(0 \le u \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le v \le 2\pi\right)$$

이고,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= < \cos u \cos v, \quad 1, \quad \cos u \sin v > \\
\mathbf{r}_v &= < -\sin u \sin v, \quad 0, \quad \sin u \cos v > \\
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= < \sin u \cos v, \quad -\cos u \sin u, \quad \sin u \sin v > \\
|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= \sqrt{\sin^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 u + \sin^2 u \sin^2 v} = \sin u \sqrt{1 + \cos^2 u}
\end{aligned}$$

이다. 따라서 곡면적분을 계산하면,

$$\begin{aligned}
&\iint_E \sqrt{1 - x^2 - z^2} dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u \cos^2 v - \sin^2 u \sin^2 v} \;\; \sin u \sqrt{1 + \cos^2 u} \;\; dudv \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos u \;\; \sin u \sqrt{1 + \cos^2 u} \;\; dudv \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (1 + \cos^2 u)^{3/2} \right]_{u=0}^{u=\pi/2} dv \\
&= -\frac{2\pi}{3} \left(1 - 2\sqrt{2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(2\sqrt{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

이다.

13. C가 둘러싸는 내부영역에 중심이 원점에 있고 위에서 볼 때 반시계 방향이며 반지름이 작은 원을 $\tilde{C}$라고 하자. 이 원의 반지름을 a라 하면, $\tilde{C}$의 매개 변수식은

$$\tilde{C}(t) = (a\cos t,\ a\sin t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

으로 표현할 수 있다.

$P = \dfrac{x^3 + xy^2 - 3y}{x^2 + y^2}$, $Q = \dfrac{y^3 + x^2y + 3x}{x^2 + y^2}$ 라고 하고, 곡선 C 와 $\tilde{C}$로 둘러싼 영역을 D 라고 하면, Green 정리에 의하여

$$\oint_{C \cup -\tilde{C}} Pdx + Qdy \;=\; \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

이다. 따라서

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_{\tilde{C}} Pdx + Qdy + \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

이다. 여기서,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^3 + x^2y + 3x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{3x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-3x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3 + xy^2 - 3y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{3y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-3x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

이므로, $\displaystyle\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0$ 이고,

$$\begin{aligned}
\oint_{\tilde{C}} Pdx + Qdy &= \int_0^{2\pi} \left(a\cos t - \frac{3a\sin t}{a^2}\right)(-a\sin t) + \left(a\sin t + \frac{3a\cos t}{a^2}\right)(a\cos t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} 3(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 6\pi
\end{aligned}$$

이다. 따라서,

$$\oint_C Pdx + Qdy = 6\pi$$

이다.

14. yz-평면에서 $y^2 + z^2 \leq 4$ $(z \geq 0)$인 영역을 D라고 하자.

$\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x$이므로 발산정리를 이용하여 곡면적분을 계산하면,

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_E \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \\
&= \iint_D \int_{y^2+z^2}^{4} 3x \, dxdydz \\
&= \iint_D \frac{3}{2} \left[16 - (y^2+z^2)^2\right] \, dydz \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^2 \frac{3}{2} \left(16 - r^4\right) r \, drd\theta \\
&= \frac{3\pi}{2} \left[8r^2 - \frac{1}{6} r^6\right]_0^2 \\
&= 32\pi
\end{aligned}$$

이다.

15. 세 점 $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$을 지나는 평면의 방정식은 $x+y+z=1$이다.

평면을 매개 변수로 표현하면,

$$\mathbf{r}\,(x,y) = < x, \quad y, \quad 1-x-y > \qquad (0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x)$$

이다. 이 때, $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x$인 영역을 D라고 하자. $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = < 1, \ 1, \ 1 >$

이므로 $x+y+z=1$에 수직이고 위쪽을 향하는 단위 법선벡터를 $\mathbf{n}$이라고 하면,

$\mathbf{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1, \ 1, \ 1 >$ 이고,

$|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| = \sqrt{3}$이다.

발산정리에 의하여,

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (-x) \ dydx \\
&= \int_0^1 x^2 - x \ dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

이다.