1. $< 2, -8, 5 >$
2. $\dfrac{\pi}{3}$ $(= 60^\circ)$
3. $\dfrac{1}{2}\sqrt{89}$
4. $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$
5. $\dfrac{9}{2}\sqrt{5}$
6. 3
7. $-\dfrac{4}{25}$
8. 2.99
9. 2
10. $e - 1$

11. 직선 L의 방향벡터를 $\mathbf{v}$라 하면, $\mathbf{v} =< 1, -1, 2 >$이다.

직선 L위의 한 점을 $Q(1, 1, 0)$라고 하고($t = 0$일 때), 점 Q와 P를 잇는 벡터를 $\mathbf{a}$라 하면, $\mathbf{a} =< -1, 0, 2 >$ 이다.

점 P와 L을 포함하는 평면에 수직인 법선벡터 $\mathbf{n}$는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{v}$에 각각 수직이므로,

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{v} =< 2, 4, 1 >$$

이다. 따라서 P와 L을 포함하는 평면의 방정식은

$$\begin{aligned} 2(x-0) + 4(y-1) + (z-2) &= 0 \\ 2x + 4y + z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

이다.

점 P를 지나고 L과 수직으로 만나는 직선의 방향벡터 $\mathbf{u}$는 $\mathbf{n}$와 $\mathbf{v}$에 각각 수직이므로

$$\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{v} =< 9, -3, -6 >= 3 < 3, -1, -2 >$$

이므로 점 P를 지나고 L과 수직으로 만나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$$

또는

$$\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= -t + 1 \\ z &= -2t + 2 \end{aligned}$$

이다.

12. $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ 이므로

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

이고

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}y + \frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}x + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{x}\right)$$

이다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial u}y + \frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right] \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}y^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(-\frac{y^2}{x^2}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{y^2}{x^4}\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{2y}{x^3}\right) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial u}x + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

이고, $y^2 = uv$ 이므로

$$\begin{aligned}
x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{2y}{x}\frac{\partial z}{\partial v} \\
&= -4uv\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2v\frac{\partial z}{\partial v}
\end{aligned}$$

이다.

13. $F = x^2 + y^2 - z^2 - 21$이라 하면 $\nabla F = < 2x, 2y, -2z >$이고,

$$\nabla F(P) = < 6, 8, -4 > \quad , \quad \nabla F(Q) = < 8, 6, 4 >$$

이다. 따라서 점 P에서 $x^2 + y^2 - z^2 = 21$ 접하는 접평면의 방정식은

$$\begin{aligned} 6(x-3) + 8(y-4) - 4(z-2) &= 0 \\ 3x + 4y - 2z - 21 &= 0 \end{aligned}$$

이고 점 Q에서 $x^2 + y^2 - z^2 = 21$ 접하는 접평면의 방정식은

$$\begin{aligned} 8(x-4) + 6(y-3) + 4(z+2) &= 0 \\ 4x + 3y + 2z - 21 &= 0 \end{aligned}$$

이다. 두 접평면의 교선의 방향벡터는

$$\mathbf{v} = < 3, 4, -2 > \times < 4, 3, 2 > = < 14, -14, -7 > = 7 < 2, -2, -1 >$$

이고, 교선 위의 한 점을 구하면 $A\left(0, 6, \dfrac{3}{2}\right)$이다.

($x = 0$일 때, $4y - 2z = 21$ 과 $3y + 2z = 21$에서 $y = 6$, $z = \dfrac{3}{2}$이다.)

따라서, 교선의 방정식은

$$\frac{x}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-3/2}{-1}$$

또는

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ y &= -2t + 6 \\ z &= -t + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이다.

14. $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$ 에서

$$\begin{aligned} f_x &= y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2} \\ f_y &= x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

이다. $f_x = 0, f_y = 0$ 으로부터 임계점은 $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 이다.

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2xy(2x^2-3)e^{-x^2-y^2} \\ f_{xy} &= (1-2x^2)(1-2y^2)e^{-x^2-y^2} \\ f_{yy} &= 2xy(2y^2-3)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

이므로

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \left[4x^2y^2(2x^2-3)(2y^2-3) - (1-2x^2)^2(1-2y^2)^2\right] e^{-2(x^2+y^2)}$$

이고, 각각의 임계점에서 Δ 와 f_{xx}의 부호를 조사하여 다음과 같이 분류가 된다.

	Δ	f_{xx}	
$(0,0)$	$-$		안장점
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$+$	$-$	극대
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$+$	$+$	극소
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$+$	$+$	극소
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$+$	$-$	극대

15. $g = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5$이라 하면, $\nabla f = \lambda \nabla g$에서

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(2x) && (1) \\ xz &= \lambda(4y) && (2) \\ xy &= \lambda(4z) && (3) \end{aligned}$$

이고

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5 = 0 \qquad (4)$$

이다.

만일 $xyz \neq 0$이면, $\lambda = \dfrac{yz}{2x} = \dfrac{xz}{4y} = \dfrac{xy}{4z}$ 이므로 $2y^2 = x^2$, $y^2 = z^2$ 이다. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5 = 0$ 으로부터

$$(x, y, z) = \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}, \pm\sqrt{\frac{5}{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$$

이다. 한편, $xyz = 0$이면, f의 함수값은 0이다. (여러가지 방법으로 $xyz \neq 0$에 대하여 설명할 수 있으나, 함숫값이 0이라는 사실만 보여도 괜찮음)

(**Note**: 이부분은 여러가지 방법으로 값을 찾을 수 있습니다. 예를 들어, 식(1),(2),(3)에 각각 x, y, z 곱한 후, 값을 찾을 수도 있습니다.)

따라서,

$$(x, y, z) = \left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}, \pm\sqrt{\frac{5}{6}}, \pm\sqrt{\frac{5}{6}}\right)$$

에서 (x, y, z)와 좌표가 모두 양수이거나 셋 중 2개의 부호만 음수인 경우 f는 최댓값 $\dfrac{5\sqrt{15}}{18}$을 갖고, (x, y, z)와 좌표가 모두 음수이거나 셋 중 1개의 부호만 음수인 경우 f는 최솟값 $-\dfrac{5\sqrt{15}}{18}$을 갖는다.