1.
a) 발산

b) 수렴

c) 발산

d) 수렴

e) 발산.

2. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

3. $2\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$

4. 수렴 반지름=$\dfrac{3}{2}$
   수렴 구간=$[-1,2)$

5. $\dfrac{1}{3}\ln 2$

6. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{16}x^3$

7. $\dfrac{4}{3}$

8. $-\dfrac{1}{6}$

9. $\dfrac{3\pi}{2}-2\sqrt{2}$

10. 곡선 $r=4(1+\cos\theta)$ 로 둘러싸인 영역을 x축 중심으로 회전한 곡면의 넓이를 구하여라.

풀이) 겉넓이= $2\pi\int y\,ds = 2\pi\int_0^{\pi} r\sin\theta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$

$$=2\pi\int_0^{\pi}4(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{((4(1+\cos\theta))^2+(-4\sin\theta)^2}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}4(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{\frac{4^3}{2}(1+\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\frac{8}{2}(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{4^3\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}8\cos^2(\frac{\theta}{2})\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,(8\cos\frac{\theta}{2})\,d\theta$$

$$=2^8\pi\int_0^{\pi}\cos^4(\frac{\theta}{2})\,\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=2^9\pi/5$$

11. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$ 의 수렴반지름 R을 구하고, $x\in(-R,R)$ 에서 $f(x)$를 유리함수로 표현하여라.

(풀이) (1) 비판정법에 의해 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{2n+1}}{nx^{2n-1}}\right|=|x|^2<1$ 에서 수렴하므로 주어진 함수는 $|x|<1$ 에서 수렴한다. 따라서 수렴반지름 $R=1$ 이다.

(2) $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} nt^{2n-1}dt=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}t^{2n}\right]_0^x=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{2}\frac{x^2}{1-x^2}$ 이다.

따라서 $f(x)=F'(x)=\frac{x}{(1-x^2)^2}, |x|<1$

12. $f(x)=\int_0^x \frac{t}{(1-2t)^2}dt$ 의 매클로린급수를 구하고, 그 급수의 수렴반지름과 수렴구간을 구하여라.

풀이) $f'(x)=\frac{x}{(1-2x)^2}$ 이다.

그런데 $\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \; (|x|<\frac{1}{2})$이므로 양변을 미분하면, $\frac{2}{(1-2x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n2^n x^{n-1}$이다.

$\therefore \; \frac{x}{(1-2x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n2^{n-1}x^n$이므로

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}2^{n-1}x^{n+1}$

수렴반지름=1/2

$f(1/2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{4}\neq 0$이므로 $x=1/2$에서는 발산.

$f(-1/2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4}\frac{n}{n+1}$이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4}\frac{n}{n+1}$는 발산하므로 $x=-1/2$ 에서도 발산.

따라서 수렴구간=(-1/2, 1/2)

13. 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan x} dx$ 을 구하여라.

[풀이] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$

$t = \tan \frac{x}{2}$ 라 하면 $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ 이다.

준식= $\int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2-2t^2}{(1+2t-t^2)(1+t^2)} dt$

$$= \int_0^1 \frac{1-t}{1+2t-t^2} + \frac{1-t}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{2(1-t)}{1+2t-t^2} + \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{1}{2} \frac{2t}{1+t^2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln|1+2t-t^2| + \tan^{-1} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

14. 부분적분법을 반복 사용하여 $\int_0^1 x^n (1-x)^n\,dx$ 의 값을 n 으로 표현하시오.

(풀이) 부분적분법을 한번 사용하면,

$$A = x^n,\ \ B' = (1-x)^n;\ A' = n x^{n-1},\ \ B = \frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}$$

으로부터

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n (1-x)^n\,dx &= \left[\frac{-1}{n+1} x^n (1-x)^{n+1}\right]_0^1 + \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,dx \\ &= \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,dx\end{aligned}$$

을 얻는다. 규칙성을 살펴보면, x^n 은 지수 n 을 분자로 주고 지수가 하나 줄어든다. 그리고 $(1-x)^n$ 은 지수 n 을 $n+1$ 로 바꾸어 분모에 주고 지수가 하나 늘어난다. 이 규칙에 따라서 계산을 하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n (1-x)^n\,dx &= \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n+1}\,dx = \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\int_0^1 x^{n-2}(1-x)^{n+2}\,dx \\ &= \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\,\frac{n-2}{n+3}\int_0^1 x^{n-3}(1-x)^{n+3}\,dx = \ \cdots \\ &= \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\,\frac{n-2}{n+3}\cdots\ \frac{1}{2n}\int_0^1 (1-x)^{2n}\,dx \\ &= \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\,\frac{n-2}{n+3}\cdots\ \frac{1}{2n}\left[\frac{-1}{2n+1}(1-x)^{2n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\,\frac{n-2}{n+3}\cdots\ \frac{1}{2n}\,\frac{1}{2n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$