2016 1학기 일반수학1 중간고사 답안

1. $-\frac{\pi}{2}$

2. $\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

3. $y = -\frac{2\ln 3}{9}x + \frac{2\ln 3}{27}.$

4. $\frac{3}{2}$

5. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. $\frac{2+3\sqrt{3}\pi}{2}$

7. $\frac{23}{20} = 1.15$

8. $\frac{4\pi}{405}\left(10^{5/2}-1\right)$

9. $\frac{\pi^2}{144}$

10. 정의역 $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, 치역 $= \{\pi/2, -\pi/2\}$

11. 곡선 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4\ (x,y>0)$위의 점 (s,t)에서 그은 접선이 x축과 만나는 점을 P, y축과 만나는 점을 Q 라 할 때 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 O는 원점이다.)

(풀이)

음함수 미분법을 이용하여 도함수를 구하면, $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$이므로,

$$y'=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\text{이다.}$$

점 (s,t)에서 그은 접선의 방정식은 $y=-\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{3}}(x-s)+t=-\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{3}}x+4t^{\frac{1}{3}}$이다.

$\therefore$ $P(4s^{\frac{1}{3}},\ 0)$, $Q(0,\ 4t^{\frac{1}{3}})$이므로, 삼각형 OPQ의 넓이는 $8s^{\frac{1}{3}}t^{\frac{1}{3}}$이다.

$s^{\frac{2}{3}}+t^{\frac{2}{3}}=4$을 이용하여 s(또는 t)만의 함수로 고치면,

$$f(s)=8s^{\frac{1}{3}}\sqrt{4-s^{\frac{2}{3}}}\ (0<s<8)\text{이다.}$$

$\therefore$ $f'(s)=\frac{16}{3}\frac{2-s^{\frac{2}{3}}}{s^{\frac{2}{3}}\sqrt{4-s^{\frac{2}{3}}}}$이고, 임계점은 $s=2\sqrt{2}$이다.

그런데 $0<s<2\sqrt{2}$일 때 $f'>0$이고, $2\sqrt{2}<s<8$일 때 $f'<0$이다.

그러므로 $s=2\sqrt{2}$일 때 최댓값 16이다.

12. 매끈한 함수 $f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(0,\ 3)$, $(6,\ 11)$ 을 지날 때,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left\{f'\left(\frac{6k}{n}\right)\right\}^2}\cdot\frac{3}{n}$ 의 최솟값을 구하여라.

(풀이)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left\{f'\left(\frac{6k}{n}\right)\right\}^2}\cdot\frac{3}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left\{f'\left(\frac{6k}{n}\right)\right\}^2}\cdot\frac{6}{n}=\frac{1}{2}\int_0^6\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

한편, $\int_0^6\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 는 곡선 $y=f(x)\,(0\le x\le 6)$ 의 길이를 나타내므로 두 점 $(0,\ 3)$, $(6,\ 11)$ 을 직선으로 연결할 때, $\int_0^6\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 의 값이 최소이다.

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{1}{2}\sqrt{(6-0)^2+(11-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36+64}=5$

13. 두 포물선 $y=ax^2\,(a>0,\,x\geq 0)$와 $y=1-x^2$의 교점을 A라 하자. 직선 OA와 포물선 $y=ax^2$으로 둘러싸인 1사분면 영역을 y축으로 회전시킨 회전체의 부피를 V라고 하자. V가 최대일 때 a의 값과 그 최대 부피를 구하여라. (단, 점 O는 원점이다.)

(풀이)

주어진 두 포물선의 교점 A의 좌표는 $ax^2=1-x^2$에서 $x=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}$이므로

$A\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}},\,\dfrac{a}{a+1}\right)$이다. 그리고 직선 OA는 $y=\dfrac{a}{\sqrt{a+1}}x$이다.

직선 OA와 포물선 $y=ax^2$으로 둘러싸인 영역을 y축으로 회전시킨 회전체의 부피 V는

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}} 2\pi x\left(\frac{a}{\sqrt{a+1}}x-ax^2\right)dx=2\pi\frac{a}{\sqrt{a+1}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}x^2\,dx-2\pi a\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}x^3\,dx$$

$$=2\pi\frac{a}{\sqrt{a+1}}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}-2\pi a\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a+1}}}=\frac{2\pi}{3}\frac{a}{(a+1)^2}-\frac{2\pi}{4}\frac{a}{(a+1)^2}=\frac{\pi}{6}\frac{a}{(a+1)^2}\,.$$

$$\frac{dV}{da}=\frac{\pi}{6}\frac{(a+1)-2a}{(a+1)^3}=\frac{\pi}{6}\frac{1-a}{(a+1)^3}$$

$0<a<1$일 때 $\dfrac{dV}{da}>0$, $a>1$일 때 $\dfrac{dV}{da}<0$이므로 V는 $a=1$에서 극댓값을 갖는다.

한편 $\displaystyle\lim_{a\to 0+}\frac{a}{(a+1)^2}=0$, $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{a}{(a+1)^2}=0$ 이므로 V의 극댓값이 최댓값이다.

따라서 $a=1$이고 최대 부피는 $V_{\max}=\dfrac{\pi}{6}\dfrac{1}{(1+1)^2}=\dfrac{\pi}{24}$ 이다.

14. 함수 $y=e^{\frac{1}{x}}$의 그래프의 개형을 그려라.

(풀이) (i) 점근선 $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$.

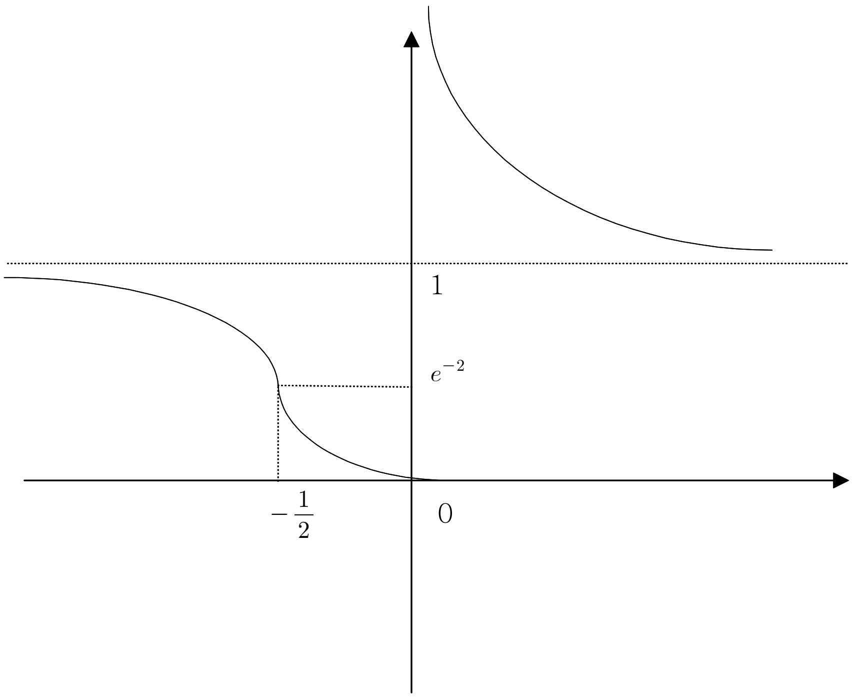
수직점근선 : $x=0$, 수평점근선 : $y=1$.

(ii) 함수의 정의역이 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$이고, $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$.

(iii) x절편, y절편은 없음.

(iv) $y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) < 0$ 이므로, 전 구간에서 감소함수이고 극점은 없다.

(v) $y'' = e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})^2 + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2}{x^3} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4}$ 에서 $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$은 변곡점이다.



15. 평균값 정리를 이용하여 $x>0$일 때 $\ln x+\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)<\ln x+\frac{1}{x}$ 임을 증명하여라.

(풀이)

$f(x)=\ln x$라 놓으면 f는 $[x,x+1]$에서 연속, $(x,x+1)$에서 미분가능이다.

구간 $[x,x+1]$에 평균값정리를 적용하면

$f'(c)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\ln(x+1)-\ln x$ 인 c가 $(x,x+1)$에 존재한다.

즉, $\frac{1}{c}=\ln(x+1)-\ln x$ 이고 $0<x<c<x+1$ 이므로 $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ 이다.

따라서, $\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$ 이고

$\ln x+\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)<\ln x+\frac{1}{x}$ 이다.