단답형

1. $\frac{\pi}{2}(1-\cos 9)$

2. $\langle -y\sin x, \cos x-\cos y, 2 \rangle$

3. $\frac{3\pi^2}{64}$

4. $\frac{245}{6}$

5. $A=0,\ B=1,\ C=x^2,\ D=2-x$

6. $\frac{38}{5}$

7. $\tan^{-1}\left(\frac{y^2}{x}\right)+y+c$

8. 8

9. $\frac{1}{3}$

10. $\frac{\pi}{3}$

서술형

11. 두 곡면 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=6z$ 와 평면 $z=0$ 으로 둘러싸인 입체의 부피를 삼중적분을 이용하여 구하여라.

풀이) 적분영역 $T=\left\{(x,y,z) \mid x^2+(y-1)^2 \le 1,\ 0 \le z \le \frac{1}{6}(x^2+y^2)\right\}$

$$=\left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le \pi, 0 \le z \le \frac{1}{6}r^2\right\}.$$

$$\iiint_T dV=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{\frac{1}{6}r^2} r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\frac{1}{6}r^2\,r\,drd\theta$$

$$=\int_0^{\pi}[\frac{1}{24}r^4]_0^{2\sin\theta}d\theta=\frac{16}{24}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\frac{1}{2^2}(1-\cos2\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^{\pi}(1-2\cos2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta=\frac{1}{6}[\theta-\sin2\theta+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{8}\sin4\theta]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

12. 입체 $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \le 1$ $(a, b, c > 0)$ 의 부피 V를 구하여라.

풀이)

$x = au^3$, $y = bv^3$, $z = cw^3$ 로 치환. 그러면

부피 $V = \iiint_T dV = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 1} 3au^2\, 3bv^2\, 3cw^2\, du\, dv\, dw.$

구면좌표 (ρ, ϕ, θ) 변환 $u = \rho\sin\phi\cos\theta$, $v = \rho\sin\phi\sin\theta$, $w = \rho\cos\phi$. 그러므로,

$$V \equiv 27abc\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (\rho\sin\phi\cos\theta)^2(\rho\sin\phi\sin\theta)^2(\rho\cos\phi)^2\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 27abc\left(\int_0^1 \rho^8\, d\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^5\phi\cos^2\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta\right)$$

=(계산하면)= $\frac{4}{35}\pi abc.$

13. 선적분 $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,\frac{\pi}{2})}(y^2-x)dx+(2xy+\sin z)dy+(y\cos z+e^{3z})dz$가 경로에 무관함을 보이고, 적분 값을 구하여라.

풀이) $\vec{F}=<y^2-x, 2xy+\sin z, y\cos z+e^{3z}>$라 하면, $\nabla\times\vec{F}=\vec{0}$이므로, $\vec{F}$는 보존적이다.

그러므로 $\vec{F}=\nabla f$가 성립하는 f을 구하자.

$f(x,y,z)=\int(y^2-x)dx=xy^2-\frac{1}{2}x^2+g(y,z)$

$\therefore\ \frac{\partial f}{\partial y}=2xy+\frac{\partial g}{\partial y}=2xy+\sin z,\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial g}{\partial z}=y\cos z+e^{3z}$이므로,

$g(y,z)=y\sin z+h(z)$이고 $\frac{\partial g}{\partial z}=y\cos z+h'(z)=y\cos z+e^{3z}$을 만족한다.

$\therefore\ h(z)=\frac{1}{3}e^{3z}+C$이고, $f(x,y,z)=xy^2-\frac{1}{2}x^2+y\sin z+\frac{1}{3}e^{3z}+C$ 이다.

$\therefore\ \int_{(0,0,0)}^{(1,1,\frac{\pi}{2})}(y^2-x)dx+(2xy+\sin z)dy+(y\cos z+e^{3z})dz=f(1,1,\frac{\pi}{2})-f(0,0,0)$

$=\frac{7}{6}+\frac{1}{3}e^{\frac{3\pi}{2}}$

14. 곡면 S 가 추면 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(1 \le z \le 2)$일 때 곡면적분 $\iint_S y^2 z\, dS$의 값을 구하여라.

(풀이) S 의 매개식 : $\vec{r}(x,y) = \langle x, y, \sqrt{x^2+y^2} \rangle$, $(R: 1 \le x^2+y^2 \le 4)$

$$\iint_S y^2 z\, dS = \iint_R y^2 \sqrt{x^2+y^2}\, \left|\overrightarrow{r_x} \times \overrightarrow{r_y}\right| dxdy$$

$$= \iint_R y^2 \sqrt{x^2+y^2}\, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$$= \iint_R y^2 \sqrt{x^2+y^2}\, \sqrt{1+\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \int_o^{2\pi}\int_1^2 r^2 \sin^2\theta\, r\, \sqrt{2}\, r dr d\theta$$

$$= \frac{31\sqrt{2}}{5}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{31\sqrt{2}}{5}\pi$$

15. 구면 $x^2+y^2+z^2=25$를 평면 $z=3$을 잘라서 큰 부분은 없애버린다. 이렇게 하여 구면의 윗부분과 편평한 원판으로 이루어진 폐곡면을 S라 하자. $\boldsymbol{n}$을 곡면 S의 외향 단위법선벡터라고 할 때, 벡터장 $\boldsymbol{F}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$의 $\boldsymbol{n}$방향으로의 유량을 구하여라. (단, 곡면적분을 이용할 것)

(풀이) 편평한 원판을 $S_1=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le 16,\ z=3\}$라 하고

구면의 윗부분을 $S_2=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=25,\ 3\le z\le 5\}$라 하면

구하려는 유량은 $\iint_S \overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n}\,dS=\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_1}\,dS_1+\iint_{S_2}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_2}\,dS_2$ 이다. 여기서 $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$는 곡면 S_1,S_2에 대한 외향 단위법선벡터이다.

(1) 먼저 $\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_1}\,dS_1$를 계산을 해보자. S_1에서 $\overrightarrow{n}=-\overrightarrow{k}=\langle 0,0,-1\rangle$이므로

$$\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_1}\,dS_1=\iint_{S_1}-1\,dS_1=-1\times(S_1\text{의 넓이})=-16\pi \text{ 이 된다.}$$

(2) 다음으로 $\iint_{S_2}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_2}\,dS_2$를 구해보자. 곡면 S_2는 다음과 같이 매개변수로 표현할 수 있다.

$$D_2=\left\{(\phi,\theta)|0\le\phi\le\tan^{-1}\frac{4}{3},\ 0\le\theta\le 2\pi\right\}$$
$$\overrightarrow{r}(\phi,\theta)=\langle 5\sin\phi\cos\theta, 5\sin\phi\sin\theta, 5\cos\phi\rangle$$
$$\overrightarrow{r_\phi}=\langle 5\cos\phi\cos\theta, 5\cos\phi\sin\theta, -5\sin\phi\rangle$$
$$\overrightarrow{r_\theta}=\langle -5\sin\phi\sin\theta, 5\sin\phi\cos\theta, 0\rangle$$
$$\overrightarrow{r_\phi}\times\overrightarrow{r_\theta}=\langle 25\sin^2\phi\cos\theta, 25\sin^2\phi\sin\theta, 25\cos\phi\sin\phi\rangle$$
$$\overrightarrow{F}=\langle xz, yz, 1\rangle=\langle 25\cos\phi\sin\phi\cos\theta, 25\cos\phi\sin\phi\sin\theta, 1\rangle$$
$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}\circ(\overrightarrow{r_\phi}\times\overrightarrow{r_\theta})&=625\cos\phi\sin^3\phi\cos^2\theta+625\cos\phi\sin^3\phi\sin^2\theta+25\cos\phi\sin\phi\\&=625\cos\phi\sin^3\phi+25\cos\phi\sin\phi\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\iint_{S_2}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_2}\,dS_2&=\iint_{D_2}\overrightarrow{F}\circ(\overrightarrow{r_\phi}\times\overrightarrow{r_\theta})\,d\phi\,d\theta=\iint_{D_2}(625\sin^3\phi+25\sin\phi)\cos\phi\,d\phi\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\tan^{-1}\frac{4}{3}}(625\sin^3\phi+25\sin\phi)\cos\phi\,d\phi\,d\theta=2\pi\left[\frac{625}{4}\sin^4\phi+\frac{25}{2}\sin^2\phi\right]_0^{\tan^{-1}\frac{4}{3}}\\&=2\pi\left(\frac{625}{4}\sin^4\tan^{-1}\frac{4}{3}+\frac{25}{2}\sin^2\tan^{-1}\frac{4}{3}\right)=2\pi\left(\frac{625}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^4+\frac{25}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)=144\pi\end{aligned}$$

따라서 $\iint_S\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n}\,dS=\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_1}\,dS_1+\iint_{S_2}\overrightarrow{F}\circ\overrightarrow{n_2}\,dS_2=-16\pi+144\pi=128\pi$ 이다.