단답형)

1. -2

2. $-\frac{19}{5}$

3. $\sqrt{13}$

4. $\sqrt{3}\,x + y = 2.$

5. A=1 , B=$\frac{1}{r^2}$

6. $\frac{2e}{\sqrt{9e^2+4}}$

7. $4\tan 5$

8. $\frac{3}{4}$

9. $\frac{70}{3}$

10. $\frac{\sqrt{54}}{4} = \frac{3\sqrt{6}}{4}$

11. 함수 $f(x,y)=2x^3-3x^2y-12x^2-3y^2$의 임계점을 모두 구하고, 임계점들을 판별하여라.

(풀이)

$\nabla f = \langle 6x^2-6xy-24x,\ -3x^2-6y \rangle$ 이므로 임계점은

$O(0,0), P(2,-2), Q(-4,-8)$ 이다.

$f_{xx}=12x-6y-24, f_{xy}=-6x, f_{yy}=-6$

$\Delta = -36(2x-y-4+x^2)$

(i) $\Delta(0,0)=(-24)(-6)>0$ 이고 $f_{xx}(O)<0$이므로 O에서 극대.

(ii) $\Delta(P)<0$ 이므로 P에서 안장점.

(iii) $\Delta(Q)<0$이므로 안장점.

12. 두 직선 $l_1 : x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ 과 $l_2 : x = y-2 = z$ 사이의 최단거리를 구하여라.

(풀이) 직선 l_1, l_2의 방향벡터는 각각 $\overrightarrow{v_1} = \langle 1,2,3 \rangle$, $\overrightarrow{v_2} = \langle 1,1,1 \rangle$ 이다.

(1) $\overrightarrow{v_1} = t\,\overrightarrow{v_2}$ 인 실수 t가 존재하지 않으므로 두 직선은 평행이 아니다.

(2) 두 식 $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$, $x = y-2 = z$를 동시에 만족하는 점(x,y,z)가 존재하지 않으므로 두 직선은 만나지도 않는다.

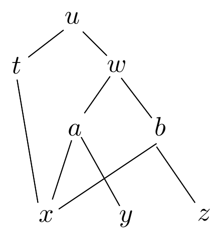
따라서 (1)과 (2)에 의해 두 직선은 꼬인 위치에 있다.

(3) 두 직선위에서 점을 하나씩 잡자. $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,2,0)$.
벡터 $\overrightarrow{P_1P_2} = \ < 0,2,0 >$를 벡터 $\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = < -1,2,-1 >$방향으로의 정사영 벡터의 크기가 바로 두 직선사이의 거리이다. 따라서 구하는 거리는

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\langle 0,2,0 \rangle \cdot \langle -1,2,-1 \rangle|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

13. $u = x^2 w\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$일 때, $xu_x + yu_y + zu_z$를 구하여라. (단, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$)

(풀이) $t = x^2$, $a = \frac{y}{x}$, $b = \frac{z}{x}$이라 하면, $u = tw$이고 다음과 같은 종속 다이어그램을 생각할 수 있다.



$$u_x = u_t \frac{dt}{dx} + u_w(w_a a_x + w_b b_x) = 2xw + u_w\left(w_a\left(-\frac{y}{x^2}\right) + w_b\left(-\frac{z}{x^2}\right)\right)$$
$$u_y = u_w w_a a_y = u_w w_a\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$u_z = u_w w_b b_z = u_w w_b\left(\frac{1}{x}\right)$$

따라서 $xu_x + yu_y + zu_z = \left(2x^2 w - u_w w_a \frac{y}{x} - u_w w_b \frac{z}{x}\right) + \left(u_w w_a \frac{y}{x}\right) + \left(u_w w_b \frac{z}{x}\right) = 2tw = 2u$이다.

14. 평면 $2x+y+3z=10$와 포물면 $z=x^2+y^2$이 만나서 타원을 이룬다. 원점에서 가장 가까이 있는 이 타원 위의 점을 구하여라.

(풀이) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$이 최소가 되는 점을 구하면 된다.
두 조건을 $g(x,y,z) = 2x+y+3z-10=0$, $h(x,y,z) = x^2+y^2-z=0$이라고 하면,
Langrange 승수법에 의해,

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

가 성립하므로

$$<2x,2y,2z> = \lambda <2,1,3> + \mu <2x,2y,-1>$$

로부터

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda + 2\mu x \ .....(1) \\ 2y = \lambda + 2\mu y \ ....(2) \\ 2z = 3\lambda - \mu \quad ....(3) \end{cases}$$

이고, (1)과 (2)에서

$$x-2y = \mu(x-2y).$$

그러므로

$$x=2y \text{ 또는 } \mu=1.$$

그런데 $\mu=1$이면, $\lambda=0$이고 $z=-\frac{1}{2}$인데 $z=x^2+y^2 \geq 0$이어야 하므로 해가 존재하지 않는다.
따라서, $x=2y$ 이고 이 식을 처음 두 조건에 대입하여 해를 구해 본다.
$5y+3z=10$ 과 $z=5y^2$을 연립하여 풀면,

$$y=\frac{2}{3},\ x=\frac{4}{3},\ z=\frac{20}{9} \quad ,\ y=-1,\ x=-2,\ z=5$$

두 점 중 $f(x,y,z)$가 더 작은 점은 $(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{20}{9})$.

15. 영역 $D=\{(\mathrm{x,y})\mid\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le 50\}$위에서 함수 $f(x,y)=\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$의 최댓값과 최소값을 구하여라.

풀이:

1) 영역 D의 내부에 있는 임계점을 구하기 위해 $\nabla f=(0,0)$ 즉
$f_x=e^{-x^2-y^2}y(1-2x^2)=0, f_y=e^{-x^2-y^2}x(1-2y^2)=0$로부터
임계점은 $(0,0), (\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}),(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}})$이다.

2) 영역 D의 경계로부터 제약조건 $g(x,y)=x^2+y^2-50$이라 하자. 라그랑즈 승수법에 의해 $\nabla f=\lambda\nabla g$ 로부터 다음의 식을 얻는다.

$$e^{-x^2-y^2}y(1-2x^2)=\lambda 2x$$
$$e^{-x^2-y^2}x(1-2y^2)=\lambda 2y$$

만약 $\lambda=0$ 인 경우는 영역 D의 내부에 있는 임계점에 해당하는 경우이므로 $\lambda\neq 0$라고 하자. 위의 두 식으로부터 $x=0\Leftrightarrow y=0$임을 알 수 있고 구하는 점 P는 원주위에 있으므로 $x\neq 0,\ \ y\neq 0$임을 알 수 있다. 따라서 위의 두 식으로부터

$$\lambda=e^{-x^2-y^2}\frac{y(1-2x^2)}{2x}=e^{-x^2-y^2}\frac{x(1-2y^2)}{2y}$$ 을 구하고

이로부터 관계식 $x^2=y^2$을 얻는다.
이 관계식은 제약조건을 만족해야 하므로 (경계위의) 구하는 점P은
$(x,y)=(5,5),(5,-5),(-5,5),(-5,-5),$이다.

3) 내부와 경계에서 구한 모든 9개의 점 중에서 함수값이 가장 큰 값이 최댓값 $\frac{1}{2e}$이고 가장 작은 값이 최솟값 $-\frac{1}{2e}$이다.