2017년도 1학기 중간시험 답안지

단답형

1. $e^{-\frac{1}{2}}$

2. $\frac{1}{4}$

3. $y=\frac{5}{4}x-3$

4. $ex-1$

5. $\frac{\pi}{12}$

6, $\frac{9}{4}$

7. $\frac{\pi}{2\ln 2}$

8. $20\sinh(1)$, 또는 $10(\sinh(1)-\sinh(-1))$

9. $\frac{\sinh 4x}{32}-\frac{x}{8}+C$ 또는 $\frac{e^{4x}-e^{-4x}}{64}-\frac{x}{8}+C$

10. $\pi(e^{-1}-e^{-4}+\frac{14}{3})$

주관식 답안지

11번. 곡선 $y=2\cos x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$, x-축, y-축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 곡선 $y=k\sin x$가 이등분할 때, k의 값을 구하여라.

(풀이) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 $y=2\cos x$와 $y=k\sin x$가 만나는 점의 x좌표를 x_0라 하자.
$\int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx = 2$ 이므로, 구하는 k는 $\int_0^{x_0}(2\cos x - k\sin x)\,dx = 1$을 만족한다.

$$\int_0^{x_0}(2\cos x - k\sin x)\,dx = \left[\,2\sin x + k\cos x\,\right]_0^{x_0} = 2\sin x_0 + k\cos x_0 - k$$

이고, $\tan x_0 = \frac{2}{k}$ 이므로

$$\sin x_0 = \frac{2}{\sqrt{k^2+4}},\ \cos x_0 = \frac{k}{\sqrt{k^2+4}}$$

이다. 따라서

$$\int_0^{x_0} 2\cos x - k\sin x\,dx = \frac{4}{\sqrt{k^2+4}} + \frac{k^2}{\sqrt{k^2+4}} - k$$

이므로,

$$\frac{4}{\sqrt{k^2+4}} + \frac{k^2}{\sqrt{k^2+4}} - k = 1$$

에서

$$k = \frac{3}{2}$$

이다.

12. 곡선 $y = \dfrac{x^2}{8} - \ln x \ \ (1 \le x \le 2)$를 $x = -2$를 중심으로 회전시킨 회전곡면의 넓이를 구하여라.

(풀이) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{x}$ 이므로 $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{x}\right)^2}\,dx = \left|\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{x}\right| dx$ 이므로,
주어진 회전곡면의 넓이 A는

$$\begin{aligned} A &= \int_{*}^{**} 2\pi r ds \\ &= \int_1^2 2\pi(x+2)\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 + \frac{2}{x}\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + x + 2\ln x\right]_1^2 \\ &= 2\pi\left(\frac{7}{3} + 2\ln 2\right) \end{aligned}$$

13번. 도함수를 이용하여 모든 $-1<x<1$ 에 대해, 등식 $\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})=\sin^{-1}x$ 임을 증명하여라.

(풀이) 함수 $f(x)=\tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})-\sin^{-1}x$로 놓으면, 함수 f는 모든 $x\in(-1,1)$에 대해 미분가능한 함수이다. 두 함수의 도함수 각각 구하면

a) $\frac{d}{dx}tan^{-1}(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\frac{d}{dx}sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

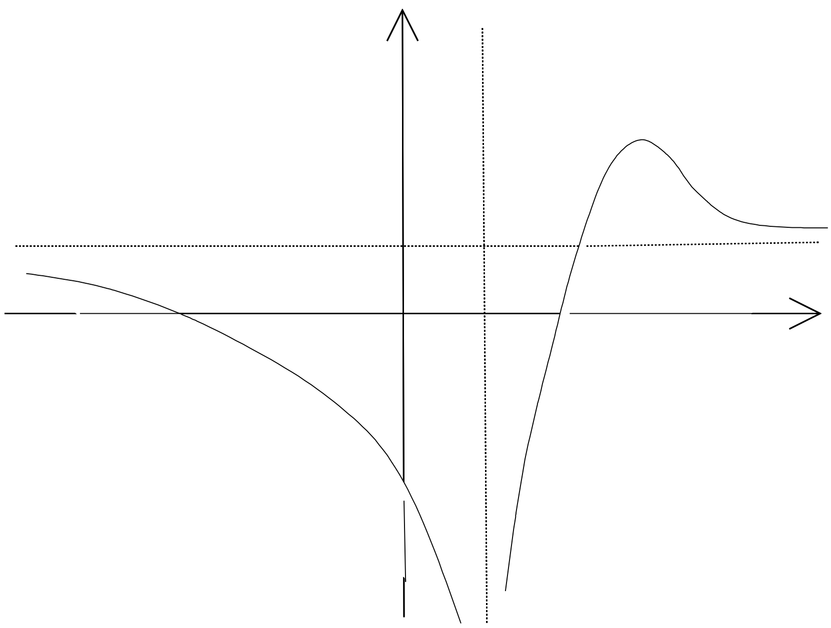
이므로 $f'(x)$=0 임을 알수 있다.
평균값 정리에 의해 $f(x)=k$ (k는 상수) 이다. $f(0)=0$이므로 $k=0$이다. 그러므로 모든 $x\in(-1,1)$에 대해 $f(x)=0$, 즉 위 등식이 성립한다.

14번. 함수 $y=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x+1}$의 극점, 변곡점, 점근선을 각각 구하고, 그래프의 개형을 그려라.

(풀이) $y=1+\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ 이므로 점근선은 $y=1,\ x=1$이다.

$$y'=\frac{-x+5}{(x-1)^2}\quad,\qquad y''=\frac{2(x-7)}{(x-1)^4}$$

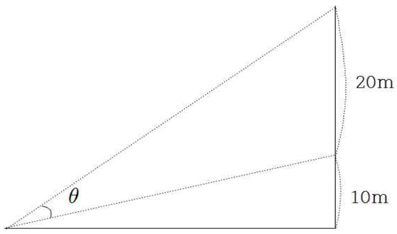
x		1		5		7	
y'	$-$	×	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	×	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y		×		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$	



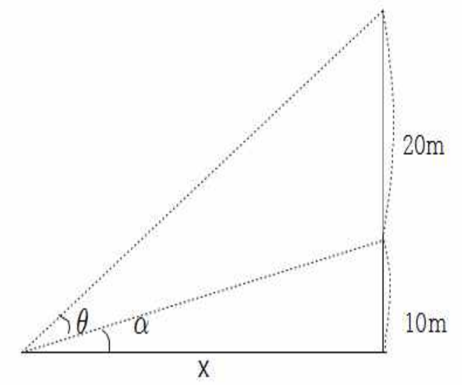
극대점 $\left(5, \dfrac{9}{8}\right)$

변곡점 $\left(7, \dfrac{10}{9}\right)$

15번. 아래의 그림과 같이 대형 극장의 벽면에 세로길이가 $20m$인 스크린을 관객의 눈높이보다 $10m$ 높은 곳에 설치한다. 가장 좋은 시야(θ)를 확보하기 위해서 스크린으로부터 떨어져야 할 거리와 각 θ를 각각 구하여라. 단, 가장 좋은 시야는 θ가 최대일 때에 확보된다고 한다.



(풀이) 아래 그림을 생각하자.



$\tan\alpha = \frac{10}{x}$ 이므로 $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10}{x}\right)$ 이고 $\tan(\theta+\alpha) = \frac{30}{x}$ 이므로 $\theta+\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{30}{x}\right)$ 이다.

따라서, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{30}{x}\right) - \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{30}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{10}{x}\right)$ 이고 가장 좋은 시야는 θ가 최대가 될 때이므로 x에 관해 미분이 0이 되는 점을 구하면 된다.

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{30}{x^2+900} + \frac{10}{x^2+100} = 0$$

그러므로 $x = 10\sqrt{3}$ 이고 이 때, $\theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 이다.