2017학년도 2학기 일반수학2 기말고사 예시 답안

단답형 정답

1. $\frac{3\pi}{2}$

2. $A = 1 - z,\ B = \sqrt{1 - y^2}$

3. $\frac{\pi}{8}$

4. $\frac{32}{3}$

5. 20π

6. $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{F} = \langle y\sin(yz), z^2, -xe^{xy}\rangle$,
$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F} = ye^{xy} - z\sin(yz) - 2xz$

7. $\frac{3\pi}{8}$

8. 0

9. 18π

10. 0

서술형 문제

11. 풀이:

삼각형을 R라 하고 R 위에서 곡면을 $\boldsymbol{r}(x,y)=\left\langle x, y, x+\dfrac{y^2}{2}\right\rangle$로 표현하자.

그러면 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}=\langle -1, -y, 1\rangle$이고, 주어진 곡면의 넓이는 다음 적분으로 얻어진다.

$$
\begin{aligned}
\text{곡면 넓이} &= \iint_R \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right| dA \\
&= \int_0^1\int_0^{2y}\sqrt{y^2+2}\,dxdy = \int_0^1 2y\sqrt{y^2+2}\,dy \\
&= \frac{2}{3}(y^2+2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

12. 풀이 1:

제1사분면($x>0,\ y>0$)에서 함수 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$은 벡터장 $\boldsymbol{F}=\left\langle \dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2} \right\rangle$의 퍼텐셜함수이고, 따라서 문제의 선적분은 경로에 무관한 선적분이다. 그러므로,

$$\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx+\frac{y}{x^2+y^2}\,dy = f(2,4)-f(1,1)$$
$$=\frac{1}{2}(\ln 20-\ln 2)=\frac{1}{2}\ln 10=\ln\sqrt{10}$$

풀이 2:

곡선 C를 매개변수로 표현하면, $x=t,\ y=t^2\ (1\le t\le 2)$이다. 따라서 문제의 선적분은

$$\int_C \frac{x}{x^2+y^2}\,dx+\frac{y}{x^2+y^2}\,dy$$
$$=\int_1^2 \frac{t+2t^3}{t^2+t^4}\,dt=\int_1^2 \frac{1}{t}+\frac{t}{1+t^2}\,dt$$
$$=\left(\ln t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}(\ln 20-\ln 2)$$

13. 풀이:

퍼텐셜함수를 $f(x,y,z)$라 두면, $f(x,y,z)=\int (e^x \cos y + yz)\,dx = e^x \cos y + xyz + g(y,z)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y$에서 $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$이고, 따라서 $g(y,z)=h(z)$로 둘 수 있다.

$\dfrac{\partial f}{\partial z} = xy + z$에서 $h'(z)=z$이고, 따라서 $h(z)=z^2+C$ (여기서, C는 상수)이다.

그러므로 퍼텐셜함수는

$$f(x,y,z)=e^x \cos y + xyz + z^2 + C \ (C\text{는 상수})$$

이다.

14. 풀이:

유량은 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$로 정의되며, 발산정리에 의해 $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dV$로 계산할 수 있다. $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = (z\sin(yz)+3x^2)+(-z\sin(yz))+(3y^2)=3(x^2+y^2)$이므로 유량을 원주좌표계를 이용하여 계산하면

$$\text{유량} = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-r^2} 3r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2 3(4r^2-r^4)\,r\,dr = 32\pi$$

15. 풀이:

곡면 S의 경계 C는 $z=9$, $x^2+9y^2=9$로 주어지는 타원이다. 법선벡터 $\boldsymbol{n}$에 따른 C의 양의 방향은 z축의 양의 방향에서 바라볼 때 반시계방향이다. 스토크스 정리를 적용하여 주어진 적분을 곡선 C 위에서의 선적분으로 바꾸면,

$$\iint_S \nabla\times F\cdot \boldsymbol{n}\,dS = \oint_C \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{T}\,ds = \oint_C \left(2xy\,dx + xz\,dy + xze^{y^2}\right)$$

이다. 곡선 C를 매개변수로 $\boldsymbol{r}(t)=\langle 3\cos t,\, \sin t,\, 9\rangle$ $(0\le t\le 2\pi)$로 표현하여 위의 선적분을 계산하면,

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla\times F\cdot \boldsymbol{n}\,dS &= \oint_C \left(2xy\,dx + xz\,dy + xze^{y^2}dz\right)\\ &= \int_0^{2\pi} -18\cos t\sin^2 t + 27\cos^2 t\,dt = 27\pi\end{aligned}$$