2017학년도 2학기 일반수학2 중간고사 예시 답안

단답형 정답

1. $\dfrac{x-1}{13}=\dfrac{y-1}{11}=\dfrac{z-2}{7}$

2. 2

3. $\dfrac{39}{20}$

4. 1.97

5. 5/11

6. $3x-6y+2z=-18$

7. 7/3

8. $\sqrt{2}\,x-y=0$

9. $(0,0)$은 극소(점), $(-2,0)$은 안장점

10. $e-1$

서술형 문제

11번 풀이:

두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1} = \langle 1,-1,1 \rangle$, $\overrightarrow{n_2} = \langle 3,-1,0 \rangle$이라 하면

교선의 방향벡터는 $\vec{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \langle 1,-1,1 \rangle \times \langle 3,-1,0 \rangle = \langle 1,3,2 \rangle$이다.

이제 구하는 평면의 법선벡터는 $\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{PQ} = \langle 1,3,2 \rangle \times \langle 2,1,2 \rangle = \langle 4,2,-5 \rangle$이다.

구하는 평면은 점 $P(1,0,-2)$를 지나고 $\vec{n}$에 수직인 평면이므로, 방정식은

$4(x-1)+2y-5(z+2)=0$. 즉, $4x+2y-5z=14$.

12번 풀이:
주면좌표의 호길이를 구하는 식

$$s = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2}\ dt$$

으로부터

$$\begin{aligned} s &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(\sec t \tan t)^2 + \sec^2 t \cdot 1^2 + (\sec^2 t)^2}\ dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sec^2 t(\tan^2 t + 1) + \sec^4 t}\ dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2\sec^4 t}\ dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}\ \sec^2 t\, dt \\ &= \sqrt{2}\ \tan t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

13번 풀이:

함수 g는 평면 전체에서 정의되고, 원점을 제외한 모든 점에서 연속이다. 따라서 g는 원점에서 연속이면 연속함수가 된다. 이제 g가 원점에서 연속인 것을 보이기 위해

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

임을 보이면 된다. 이를 위해 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$로 치환하여 계산하면,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{r\to 0}\frac{r^3\sin\theta\,\cos\theta}{r} = 0$$

이다. 그러므로 함수 g는 연속함수이다.

14번 풀이:
$\nabla f(x,y) = \ < 4x+2y-8,\ 2x+2y-6 >$ 이므로, f의 임계점은 (1,2)이고 (1,2)는 R의 내부의 점이다. 그리고 이 점에서

$$f_{xx}(1,2) = 4\,, \quad f_{yy}(1,2) = 2\,, \quad f_{xy}(1,2) = f_{yx}(1,2) = 2$$

이다. $\Delta = f_{xx}(1,2)f_{yy}(1,2) - (f_{xy}(1,2))^2 = 4 > 0$ 이고 $f_{xx}(1,2) = 4 > 0$이므로 (1,2)는 f의 f의 극소점이고 $f(1,2) = -10$은 극솟값이다.

(i) 직선 $x=0$ $(0 \le y \le 3)$에서 $f(0,y) = y^2 - 6y$이므로, $0 \le y \le 3$인 범위에서 $f(0,y)$는 $y=3$일 때 최솟값 -9를 가지고, $y=0$일 때 최댓값 0을 가진다.

(ii) 직선 $y=x$ $(0 \le x \le 3)$에서 $f(x,x) = 5x^2 - 14x$ 이므로, $0 \le x \le 3$인 범위에서 $f(x,x)$는 $x = \frac{7}{5}$일 때 최솟값 $-\frac{49}{5}$를 가지고, $x=3$일 때 최댓값 3을 가진다.

(iii) 직선 $y=3$ $(0 \le x \le 3)$에서 $f(x,3) = 2x^2 - 2x - 9$ 이므로, $0 \le x \le 3$인 범위에서 $f(x,3)$은 $x = \frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{19}{2}$를 가지고, $x=3$일 때 최댓값 3을 가진다.

정리하면 f는 점 $(3,3)$에서 최댓값 3, 점 (1,2)에서 최솟값 -10을 가진다.

15번 풀이:

$V = \int_{-1/2}^{3/2}\int_{-\sqrt{1-(y-1/2)^2}}^{\sqrt{1-(y-1/2)^2}} (y+3/4)-(x^2+y^2)\,dx\,dy$ 이므로

$g(x,y) = \frac{3}{4} - x^2 + y - y^2,\ \phi(y)\psi(y) = -(1-(y-1/2)^2) = y^2 - y - \frac{3}{4},$

$b/a = -3$ 이므로 구하는 값(식)은 $-x^2-3$ 이다.