1. (a) 수렴 (b) 수렴 (c) 수렴 (d) 발산 (e) 발산

2. $\dfrac{27}{64}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)$

3. $\dfrac{\pi + 1}{4}$

4. 2

5. $-\dfrac{5}{48}$

6. $\dfrac{2}{3}$

7. 12

8. $(0,\ 0)$, $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}+1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

9. $\dfrac{4(3+\sqrt{3})}{27}$

10. 특이적분 $\int_0^\infty x^{3/2}e^{-x}dx$의 값을 구하시오. (단, $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$이다.)

$x = t^2$으로 치환을 하면,

$$\begin{aligned}\int x^{3/2}e^{-x}dx &= 2\int t^4 e^{-t^2}dt = -\int t^3(-2t)e^{-t^2}dt \\ &= -t^3e^{-t^2} + 3\int t^2 e^{-t^2}dt \\ &= -t^3e^{-t^2} + 3\left[-\frac{1}{2}te^{-t^2} + \frac{1}{2}\int e^{-t^2}dt\right] \\ &= -t^3e^{-t^2} - \frac{3}{2}te^{-t^2} + \frac{3}{2}\int e^{-t^2}dt\end{aligned}$$

이다.

따라서,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{3/2}e^{-x}dx &= \lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{3/2}e^{-x}dx \\ &= \lim_{M\to\infty}\left\{\left[-t^3e^{-t^2} - \frac{3}{2}te^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{M}} + \frac{3}{2}\int_0^{\sqrt{M}} e^{-t^2}dt\right\} \\ &= \frac{3}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\end{aligned}$$

이다.

11. 자연수 n에 대하여, $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\ dx$라고 하자. $a_n = I_n - I_{n+4}$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$을 구하여라.

$$
\begin{aligned}
\int \left(\tan^n x - \tan^{n+4} x\right)\ dx &= \int \tan^n x(1-\tan^4 x)\,dx = \int \tan^n x(1-\tan^2 x)(1+\tan^2 x)\,dx \\
&= \int \tan^n x(1-\tan^2 x)\sec^2 x\,dx = \int \tan^n x\sec^2 x dx - \int \tan^{n+2} x\sec^2 x dx \\
&= \frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x - \frac{1}{n+3}\tan^{n+3} x + C
\end{aligned}
$$

따라서,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \int_0^{\pi/4} \left(\tan^n x - \tan^{n+4} x\right)\ dx = \left[\frac{1}{n+1}\tan^{n+1} x - \frac{1}{n+3}\tan^{n+3} x\right]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}
\end{aligned}
$$

이고,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right] \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

이다.

12. 다음 멱급수의 수렴 반지름과 수렴 구간을 각각 구하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}\right]^2 x^n$$

$a_n=\left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}\right]^2$이라 하면,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)(2n+2)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right]^2=\left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^2 \tag{1}$$

이므로,

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$$

이다. 따라서, 수렴반지름

$$R=\frac{1}{\rho}=1$$

이다.

한편, $k\geq 1$일 때, $(2k)^2\geq(2k-1)(2k+1)$ 이므로,

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}\right]^2=\frac{2^2}{3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot7}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{2n+1} \\ &\geq \frac{4}{3(2n+1)}\geq\frac{1}{3n}(\geq 0) \end{aligned}$$

이다. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$은 발산하므로 비교판정법에 의해, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$도 발산한다. 따라서, $x=1$일 때 발산한다.

또한, $k\geq 1$일 때, $(2k-1)^2\geq(2k-2)(2k)$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}\right]^2=2\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{4\cdot6}{5^2}\cdots\frac{(2n-2)(2n)}{(2n-1)^2}\cdot\frac{(2n)}{(2n+1)^2} \\ &\leq 2\cdot\frac{(2n)}{(2n+1)}\cdot\frac{1}{(2n+1)}\leq\frac{1}{n} \end{aligned}$$

이므로 $n\to\infty$일 때, $a_n\to 0$이다. 그리고 $n\geq 1$일 때, 식 (**??**)에 의해 a_n은 감소수열이다. 교대급수 판정법에 의하여 $x=-1$일 때, 주어진 수열은 수렴한다.

따라서 수렴구간은 $[-1,1)$이다.

13. 곡선 $r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$ $\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$의 길이를 구하여라.

$\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$이므로,

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \frac{4}{(1+\cos\theta)^2} + \frac{4\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4} = \frac{4(1+\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4} = \frac{8}{(1+\cos\theta)^3} \\ &= \frac{1}{\left[\frac{(1+\cos\theta)}{2}\right]^3} = \sec^6\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

이다. 구하는 곡선의 길이

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^3\left(\frac{\theta}{2}\right)\ d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x\ dx$$

이다. 여기서

$$\int \sec^3 x\ dx = \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x\ dx = \tan x \sec x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x\ dx$$

이므로,

$$\int \sec^3 x\ dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\int \sec x\ dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

이다. 따라서, 곡선의 길이는

$$s = \tan x \sec x + \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

이다.

14. 극방정식 $r = 2\sin\theta + 4\cos\theta + \sqrt{2}\tan\theta$로 주어진 곡선에 대하여, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$에서 곡선 위의 점을 P라 하고, 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. $\angle OPQ$를 α라 할 때, $\tan\alpha$의 값을 구하여라. (단, O는 원점이다.)

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$에서 $r = 2\sin\theta + 4\cos\theta + \sqrt{2}\tan\theta$의 기울기는

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \left.\frac{\frac{dr}{d\theta}\sin\theta + r\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cos\theta - r\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \left.\frac{\frac{dr}{d\theta} + r}{\frac{dr}{d\theta} - r}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} \\
&= \left.\frac{(2\cos\theta - 4\sin\theta + \sqrt{2}\sec^2\theta) + (2\sin\theta + 4\cos\theta + \sqrt{2}\tan\theta)}{(2\cos\theta - 4\sin\theta + \sqrt{2}\sec^2\theta) - (2\sin\theta + 4\cos\theta + \sqrt{2}\tan\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

이다.

따라서, 선분 PQ가 양의 x축과 이루는 각을 β라 하면, $\tan\beta = -\dfrac{5}{3}$이고 삼각형 OPQ로 부터

$$\tan\alpha = \tan\left(\beta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\beta - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\beta\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{5}{3} - 1}{1 - \frac{5}{3}} = 4$$

이다.