1. $\frac{1}{2}$
2. $e^{2\sqrt{2}}$
3. -3
4. $\frac{16}{3}$
5. $\frac{4}{3}$
6. $4\pi(21 - 10\ln 4)$
7. $\frac{10}{3}\pi$
8. $-\frac{8}{17}$
9. $\frac{1}{12}$
10. $\frac{1}{4}e^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

11. 원점 O에서 곡선 $y = e^{ax}$ (단, $a > 0$)에 그은 접선의 접점을 지나고, 접선에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 P라고 하자. 직선 OP의 길이를 최소가 되게 하는 a의 값을 구하여라.

접점을 $\left(t, e^{at}\right)$라고 하면,

접선의 기울기 $f'(t) = ae^{at} = \dfrac{e^{at}}{t}$이므로 $t = \dfrac{1}{a}$이다.

따라서, 접점은 $\left(\dfrac{1}{a}, e\right)$이고, 접선의 기울기는 ae이다.

이 접점을 지나는 법선의 방정식은 $y - e = -\dfrac{1}{ae}\left(x - \dfrac{1}{a}\right)$이므로, 점$P$는 $\left(e^2 a + \dfrac{1}{a},\ 0\right)$이다.

이 때 OP의 길이를 a에 대한 함수로 표현하면,

$$l(a) = e^2 a + \frac{1}{a}$$

이다.

$l'(a) = e^2 - \dfrac{1}{a^2}$ 이므로 $a > 0$인 범위에서 임계점은 $a = \dfrac{1}{e}$이다.

a가 $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right)$인 구간에서는 $l'(a) < 0$이므로 l은 감소함수이고, $\left(\dfrac{1}{e},\ \infty\right)$인 구간에서는 $l'(a) > 0$이므로 l은 증가함수이다. 따라서, $a = \dfrac{1}{e}$에서 최소값을 갖는다.

12. $x=\alpha$에서 $y=\cosh x$의 접선이 원점을 지난다고 하자. $g(x)=\tanh x-\dfrac{1}{x}$라고 할 때, $g(\alpha)$와 $g'(\alpha)$의 값을 각각 구하여라.

$x=\alpha$에서 $y=\cosh x$에 접하는 방정식은 $y=\sinh\alpha\,(x-\alpha)+\cosh\alpha$이다. 접선이 원점을 지나므로 $-\alpha\sinh\alpha+\cosh\alpha=0$이므로,

$$\tanh\alpha=\frac{1}{\alpha}$$

이다. 따라서 $g(\alpha)=\tanh\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=0$이다.

또한,

$$g'(x)=\operatorname{sech}^2 x+\frac{1}{x^2}=1-\tanh^2 x+\frac{1}{x^2}$$

이므로,

$$g'(\alpha)=1-\tanh^2\alpha+\frac{1}{\alpha^2}=1-\left(\tanh\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\tanh\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=1$$

이다.

13. 곡선 $y=\tan x \left(0 \le x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, y축, 직선 $y=1$로 둘러싸인 영역을 $y=-1$을 중심축으로 회전하여 생긴 입체의 부피를 구하여라.

(단면법) $y=\tan x$와 $y=1$은 $x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 만난다.

$$V=\int_0^{\pi/4}\pi\left[2^2-(\tan x+1)^2\right]dx=\pi\int_0^{\pi/4}\left(3-\tan^2 x-2\tan x\right)dx$$

이다.

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C\\ \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C\end{aligned}$$

이므로

$$V=\pi\left[4x-\tan x+2\ln\cos x\right]_0^{\pi/4}=\pi\left(\pi-1+2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi\left(\pi-1-\ln 2\right).$$

(원통각법) $x=\tan^{-1}y$이므로

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 2\pi(y+1)\tan^{-1}y dy\\ &= \pi\left\{\left[(y+1)^2\tan^{-1}y\right]_0^1-\int_0^1\frac{(y+1)^2}{1+y^2}dy\right\}\\ &= \pi\left\{\pi-\int_0^1\left(1+\frac{2y}{1+y^2}\right)dy\right\}=\pi\left\{\pi-\left[y+\ln(1+y^2)\right]_0^1\right\}\\ &= \pi(\pi-1-\ln 2)\end{aligned}$$

이다.

14. 곡선 $y = \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$ $(1 \le x \le 3)$의 길이를 구하여라.

$y = \ln(e^x+1) - \ln(e^x-1)$ 이므로,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x-1} = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1} \\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= 1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{e^{4x}-2e^{2x}+1+4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2} \end{aligned}$$

이다. 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} s &= \int_1^3 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_1^3 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx = \int_1^3 \frac{2e^{2x}-e^{2x}+1}{e^{2x}-1}dx \\ &= \int_1^3 \left(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1\right)dx = \left[\ln(e^{2x}-1) - x\right]_1^3 \\ &= \ln(e^6-1) - \ln(e^2-1) - 2 = \ln\left(\frac{e^6-1}{e^2-1}\right) - 2 \end{aligned}$$

이다.

15. (a) 폐구간 $[-a,a]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx$ 가 성립함을 보여라.

(b) $F(x) = \int_{-x}^{x} \frac{t^2-1}{e^t+1}\ dt$ 일 때, $F(x)=0$인 양수 x값을 구하여라.

(a) $x=-u$로 치환을 하면, $x=-a$일 때 $u=a$이고, $x=0$일 때 $u=0$이며 $dx=-du$이다. 따라서

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} -f(-u)du = \int_{0}^{a} f(-u)du$$

이므로 $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx$이다.

(b) $f(t) = \frac{t^2-1}{e^t+1}$라고 하자. (a)의 결과를 이용하면,

$$F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\ dt = \int_{-x}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} f(t)\ dt = \int_{0}^{x} [f(-t)+f(t)]\ dt$$

이다.

$$\begin{aligned} f(-t)+f(t) &= \frac{t^2-1}{e^{-t}+1} + \frac{t^2-1}{e^t+1} = (t^2-1)\left(\frac{1}{e^{-t}+1} + \frac{1}{e^t+1}\right) \\ &= (t^2-1)\frac{e^t+1+e^{-t}+1}{(e^{-t}+1)(e^t+1)} = t^2-1 \end{aligned}$$

이므로,

$$F(x) = \int_{0}^{x} (t^2-1)\ dt = \frac{1}{3}x^3 - x = x\left(\frac{1}{3}x^2-1\right) = 0$$

인 양수 x값을 구하면, $x=\sqrt{3}$이다.