1. $\left\langle 4xy - 2y,\ 2x - 1 - 2y^2,\ 4x - 1 \right\rangle$

2. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$

3. $xe^{x+y} + C$

4. $\frac{1}{2}$

5. $(\sqrt{\pi})^3$

6. 12π

7. 4π

8. 12π

9. $\frac{32}{9}$

10. $8\sqrt{17}\pi$

11. 두 집합 $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$와
$B = \left\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le \sqrt{3(x^2+y^2)}\right\}$의 공통부분으로 이루어진 입체의 부피를 구하여라.

(풀이) 구면좌표로 구의 방정식은 $\rho = 2\cos\phi$이고 추면의 방정식은 $\phi = \frac{\pi}{6}$이다. 따라서 구면좌표로 입체 T를 표현하면

$$T = \left\{(\rho,\phi,\theta) \mid 0 \le \rho \le 2\cos\phi,\ \frac{\pi}{6} \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

이다. 따라서 입체의 부피는

$$\begin{aligned}\iiint_T 1dV &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\phi} d\phi d\theta \\ &= \frac{16\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi \cos^3\phi d\phi = \frac{16\pi}{3}\left[-\frac{1}{4}\cos^4\phi\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

12. 곡선 C가 $xy-$평면에서 점 $(5,0)$에서 시작하여 점 $(2,3)$을 잇는 선분을 나타낼 때, 선적분

$$\int_C (1+xy)e^{xy}dx + (e^y + x^2e^{xy})dy$$

를 구하여라.

(풀이) $P=(1+xy)e^{xy}$, $Q=e^y+x^2e^{xy}$라 하면,

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 이므로, 벡터장 $\mathbf{F}=< P,Q >$는 보존적이다.

$\mathbf{F}=\nabla f$를 만족하는 $\mathbf{F}$의 퍼텐셜 함수를 하나 찾으면, $f=e^y+xe^{xy}$이다.

따라서,

$$\begin{aligned}\int_C (1+xy)e^{xy}dx + (e^y + x^2e^{xy})dy &= f(2,3)-f(5,0)\\ &= e^3+2e^6-6\end{aligned}$$

이다.

13. 곡선 C를 평면 $x+y+z=1$과 각 좌표평면의 교선으로 이루어진 삼각형이라고 할 때, 역장 $\mathbf{F}=\langle y, xz, x^2\rangle$가 곡선 C를 따라서 한 일을 Stokes 정리를 사용하여 구하여라.
단, 곡선 C는 위에서 볼 때 반시계 방향이다.

(풀이) 곡면 S를 곡선 C로 둘러싸인 평면(삼각형) 영역으로 잡으면
S의 매개식은 $\vec{r}\,(x,y) =< x, y, 1-x-y >$ 이고
매개곡면의 정의역은 $D: 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x$ 이다.

$\nabla \times \mathbf{F} =< -x, -2x, -x-y >$ 이고
$\mathbf{n}\; dS = \pm\,(\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\, dxdy = \pm < 1,1,1 > dxdy$ 중에서
$\mathbf{n}$이 위로 향하므로 $\mathbf{n}\; dS =< 1,1,1 > dxdy$ 이다.

이제 Stokes 정리를 사용하여 일 W를 구하면

$$\begin{aligned}
W &= \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}ds \\
&= \int\int_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS \\
&= \int\int_D < -x, -2x, -x-y > \cdot < 1,1,1 > \;\; dxdy \\
&= \int_0^1\int_0^{1-x} (-4x-y)\; dydx \\
&= -\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

14. 곡면 S가 구면 $x^2+y^2+z^2=9$의 제1팔분원이고 $f(x,y,z)=2z^2$일 때, 곡면적분 $\iint_S f dS$를 구하여라.

풀이) 곡면 S의 매개변수식을 구하면

$$r(\phi,\theta) = <3\sin\phi\cos\theta, 3\sin\phi\sin\theta, 3\cos\phi>$$

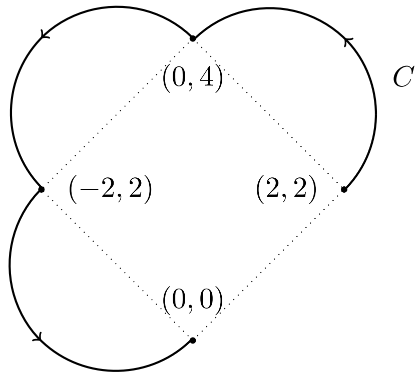
$$R = \left\{(\phi,\theta) : 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

곡면적분요소 $dS = \left|\frac{\partial r}{\partial \phi} \times \frac{\partial r}{\partial \theta}\right| d\phi d\theta = 9\sin\phi d\phi d\theta$

$$\iint_S f dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} 18\cos^2\phi \; 9\sin\phi \; d\phi \; d\theta = 27\pi$$

.

15. $xy-$평면의 곡선 C는 아래 그림과 같이 인접한 두 점 사이의 거리를 지름으로 하는 세 개의 반원으로 이루어져 있고, 방향은 그림과 같이 주어졌다. 그린정리를 이용하여 선적분 $\int_C x\,dy$의 값을 구하여라.



(풀이) 곡선 $\tilde{C}$를 점$(0,0)$에서 시작하여 점 $(2,2)$를 잇는 선분이라 하자.

$$\tilde{C}(t) = (t,t) \ (0 \le t \le 2).$$

그러면 $C+\tilde{C}$는 단순폐곡선으로 그린정리에 의해

$$\int_{C+\tilde{C}} x\,dy \ = \iint_D 1\,dA = \text{area}(D) = 3\pi + 8$$

이다. 그런데

$$\int_{\tilde{C}} x\,dy \ = \int_0^2 t \cdot 1\,dt \ = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2 \ = 2$$

이다.

$$\int_{C+\tilde{C}} x\,dy = \int_C x\,dy + \int_{\tilde{C}} x\,dy \ = \int_C x\,dy + 2$$

이므로,

$$\int_C x\,dy = \int_{C+\tilde{C}} x\,dy - 2 \ = 3\pi + 6$$

이다.