1. $\rho = 2\cos\phi$
2. $1/2 + \sqrt{2}$
3. $\frac{\sqrt{70}}{14}$
4. 3
5. 2
6. $\frac{5}{2}$
7. $\langle \frac{5}{\sqrt{74}}, \frac{7}{\sqrt{74}} \rangle$
8. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$
9. $x + \sqrt{3}y - 2z = 0$
10. 0

11. 점 $A(5,3,-2)$를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{u} = \langle 2,2,1\rangle$인 직선을 l_1, 두 점 $B(4,-1,-1)$, $C(2,0,1)$을 지나는 직선을 l_2라 할 때, 두 직선 l_1과 l_2사이의 거리를 구하여라.

(풀이) 벡터 $\overrightarrow{AB} = \langle -1,-4,1\rangle$를 벡터 $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{BC} = \langle 3,-6,6\rangle$ 방향으로의 정사영 벡터의 크기가 두 직선 l_1과 l_2사이의 거리이다. 따라서 구하는 거리는
$D = comp_{\overrightarrow{n}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|} = 3.$

12. $z = f(x,y) = \int_x^y \cos(t^2)dt$의 선형 근사식을 이용하여 $\int_{-0.1009}^{0.1009} \cos(t^2)dt$의 근삿값을 구하여라.

(풀이) 미적분학의 기본정리에 의해 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = -\cos(x^2)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y^2)$이므로 $(0,0)$ 근방에서 $z = f(x,y)$의 선형 근사식은

$$f(x,y) \approx f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = y - x$$

이다. 즉

$$f(x,y) = \int_x^y \cos(t^2)dt \approx y - x$$

이므로

$$\int_{-0.1009}^{0.1009} \cos(t^2)dt = f(-0.1009, 0.1009) \approx 0.2018$$

13. 점 $(2,2,2)$에서 곡면 $S_1 : xyz = 8$에 접하는 접평면을 P_1, 곡면 $S_2 : x^2+2y^2+3z^2 = 24$에 접하는 접평면을 P_2라 하자. 두 접평면 P_1, P_2가 만나는 교선이 yz평면과 만나는 점의 좌표를 구하여라.

(풀이) $F(x,y,z) = xyz - 8$, $G(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 24$라고 하면, 점 $(2,2,2)$에서 곡면 S_1에 접하는 평면에 수직인 vector는 $\nabla F(2,2,2) =< 4,4,4 >$이고, 곡면 S_2에 접하는 평면에 수직인 vector는 $\nabla G(2,2,2) =< 4,8,12 >$이다. 따라서, 구하는 직선의 방향벡터는

$$\nabla F(2,2,2) \times \nabla G(2,2,2) =< 16,-32,16 >$$

과 평행하고 점 $(2,2,2)$를 지나므로, 직선의 방정식은

$$x - 2 = \frac{y-2}{-2} = z - 2$$

로 표현할 수 있다. 이 직선이 yz평면과 만나는 점은 $(x,y,z) = (0,6,0)$이다.

14. 함수

$$f(x,y)=\int_0^1 (x+y\sqrt{t}-t)^2\,dt$$

의 임계점을 모두 구하고 분류하여라.

(풀이) 위의 함수의 그래디언트를 구하면

$$\begin{aligned}\nabla f &= \left\langle 2\int_0^1 (x+y\sqrt{t}-t)\,dt, 2\int_0^1 \sqrt{t}(x+y\sqrt{t}-t)\,dt\right\rangle \\ &= \left\langle 2x+\frac{4}{3}y-1, \frac{4}{3}x+y-\frac{4}{5}\right\rangle\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서 임계점은 다음과 같다.

$$(x,y)=\left(-\frac{3}{10},\frac{6}{5}\right).$$

한편 $f_{xx}=2>0, f_{yy}=1, f_{xy}=f_{yx}=4/3$이므로 $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$이다. 따라서 위의 주어진 점에서 f는 극솟값을 가진다.

15. 실수 x, y가 $x^2+xy+y^2=6$을 만족할 때 라그랑즈 승수법을 이용하여 x^3+y^3의 최댓값과 최솟값을 각각 구하여라.

(풀이) 함수 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$를 각각

$$f(x,y) = x^3+y^3, \qquad g(x,y) = x^2+xy+y^2$$

라 쓰자. 점 $g(x,y)=6$을 만족하는 점 (x,y)에서 f가 최댓값 또는 최솟값을 가진다면 $\nabla g(x,y) = (2x+y, x+2y) \neq (0,0)$이므로

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

를 만족하는 상수 $\lambda \in \mathbb{R}$가 존재한다. 이를 풀어서 쓰면

$$\begin{cases} 3x^2 = \lambda(2x+y) & \cdots (1) \\ 3y^2 = \lambda(x+2y) & \cdots (2) \end{cases}$$

이다. (1)−(2)로부터

$$3(x+y)(x-y) = \lambda(x-y)$$

이므로 $y=x$이거나 $x+y=\dfrac{\lambda}{3}$이다.

(i) $y=x$이면 제약조건으로부터 $x^2=2$이고, 따라서 $y=x=\pm\sqrt{2}$이다. 이 경우에

$$f(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = \pm 4\sqrt{2}$$

이다.

(ii) $x+y=\lambda/3$이면 (1)+(2)로부터

$$\frac{\lambda^2}{3} - 6xy = 3(x+y)^2 - 6xy = 3(x^2+y^2) = 3\lambda(x+y) = \lambda^2$$

이므로, $xy = -\dfrac{\lambda^2}{9}$이다. 그러면 제약조건으로부터

$$6 = x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy = \frac{2\lambda^2}{9}$$

이므로, $\lambda = \pm 3\sqrt{3}$이다. 이 경우에

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= \frac{4\lambda^3}{27} = \pm 12\sqrt{3} \end{aligned}$$

이다.

(i)과 (ii)로부터 최댓값은 $12\sqrt{3}$이고 최솟값은 $-12\sqrt{3}$이다.