일반수학1(MTH1001) 기말시험

점수 | 감독관

2019년 6월 17일 (월) 오전 10:00 – 11:40

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

1번 – 10번은 단답형 문제이며, 풀이과정은 쓸 필요가 없습니다. 주어진 답란에 적힌 답으로만 채점되고 부분점수는 없습니다.

1. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{pmatrix}$ 의 역행렬이 존재하고 $A = A^{-1}$ 일 때, $x - y$ 의 값을 구하시오.

답

2. 함수 $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ 의 매클로린 급수를 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 으로 나타내었을 때 a_n 의 식을 구하시오.

답

3. 극한 $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - e^{-2x^2}}{\sin^4 x}$ 의 값을 구하시오.

답

4. 점 $x = \dfrac{\pi}{2}$에서 $f(x) = \sin^2 x$ 의 4차 테일러다항식 $P_4(x)$ 를 구하시오.

답

5. 함수 $f(x) = x\sin(x^2)$ 에 대하여 $f^{(2019)}(0)$ 의 값을 구하시오.

답

6. 벡터 $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$ 와 $\mathbf{b} = \langle 2, 3, -4\rangle$ 에 대하여 벡터 $\mathbf{u}$ 와 $\mathbf{b}$ 는 평행하고 벡터 $\mathbf{v}$ 와 $\mathbf{b}$ 는 서로 수직이며 $2\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{a}$ 가 성립한다. 이 때 내적 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$ 의 값을 구하시오.

답

7. xy평면에서 $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ $\left(\frac{\pi}{2} \le t \le \pi\right)$로 주어진 매개변수곡선의 길이를 구하시오.

답

8. $\mathbb{R}^3$에서 평면 $x + y + 2z - 1 = 0$과도, $2x - y + z + 1 = 0$과도 만나지 않는 직선과 평행하고 점 $(0, 1, 2)$를 지나는 직선의 대칭방정식을 구하시오.

답

감독관

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

9. $\mathbb{R}^3$에서 점 $P(-1,-2,1)$를 지나고 평면 $2x+y-2z=3$과 수직인 직선이 이 평면과 만나는 점을 P'이라 하자. 점 Q의 좌표가 $(3,1,-1)$일 때 삼각형 PQP'의 넓이를 구하시오.

답

10. 다음 행렬 A, B에 대하여 $A^\top B^{-1}A$의 행렬식 $\det\left(A^\top B^{-1}A\right)$의 값을 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

답

11번 – 15번은 서술형 문제(각 10점)입니다. 핵심 풀이과정을 모두 서술하여야 합니다.

11. 다음 물음에 답하시오.

(a) $f(x)=x^2e^x$ 의 매클로린 급수를 구하시오.

(b) (a)의 결과를 이용하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)2^{n+1}}{n!}$ 의 값을 구하시오.

풀이

12. xy평면에서 곡선 $r = 2 + 2\sin\theta$ 의 내부와 원 $r = 6\sin\theta$ 의 외부에 놓인 영역의 넓이를 구하시오.

풀이

13. 극좌표로 주어진 곡선 $r = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$를 생각하자.

(a) $0 \le \theta \le 2\pi$일 때 이 곡선의 개형을 xy평면에 그리시오.

(b) xy평면에서 이 곡선 위의 점 P_0 $\big(P_0 \neq (0,0)\big)$에서 접선의 기울기가 0이다. 점 P_0의 편각을 θ_0라 할 때, $\cos\theta_0$의 값을 구하시오. 단, $0 < \theta_0 < 2\pi$이다.

풀이

감독관

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

14. $\mathbb{R}^3$에서 매개변수곡선 $C(t) = \big(t+1,\, t^2,\, 2t-5\big)$ $(t \in \mathbb{R})$와 평면 $M : 2x+3y-z=4$가 있다. 곡선 C 위의 점 중에서 평면 M와 가장 가까운 점을 P라 하고, 평면 M이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 Q, R, S라 하자. 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 가지는 사면체의 부피를 구하시오.

(주의: 풀이에 점 P, Q, R, S의 좌표를 반드시 쓰시오.)

풀이

15. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$의 n제곱을 $A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n}$이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $A^n \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$이 성립할 때, 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$의 수렴구간을 구하시오.

(필요하면 $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$라 두고 $A^{n+1} = A\,A^n$임을 이용하여 수열의 점화식을 유도하시오.)

풀이