2019년 일반수학1 기말시험 답과 풀이

1번. 1

2번. $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

3번. $-\frac{4}{3}$

4번. $1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4$

5번. $\frac{2019!}{1009!}$

6번. $\frac{8}{29}$

7번. $\frac{3}{2}$

8번. $x = y - 1 = -z + 2$

9번. 3

10번. 18

힌트.

1. $AA = I_2$이므로 $x = -1$이고 $y = -2$.
2. $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(x/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad (|x| < 1)$.
3. $\cos(2x) \ = \ 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + x^6 u(x), \quad e^{-2x^2} \ = \ 1 + (-2x^2) + \frac{(-2x^2)^2}{2!} + x^6 v(x)$, $\sin x = x + x^3 w(x)$.
4. $f(x) = \left(\sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$.
5. $f(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$. $\quad \frac{f^{(2019)}(0)}{2019!} = \frac{(-1)^{504}}{1009!}$.
6. $2\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$이므로 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{2}\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{b}|^2}$.
7. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2}dt = -\frac{3}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2t)\, dt$.
8. $\langle 1, 1, 2\rangle \times \langle 2, -1, 1\rangle = \langle 3, 3, -3\rangle$이 이 직선의 방향벡터.
9. 이 직선의 매개변수 방정식은 $x = -1 + 2t, \ \ y = -2 + t, \ \ z = 1 - 2t$. 이 직선은 $t = 1$일 때 평면과 만난다. P'의 좌표는 $(1, -1, -1)$이고, PQP'의 넓이는 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QP'}|$.
10. $\det\left(A^\top B^{-1} A\right) = \det(A^\top)\det(B^{-1})\det(A) = (\det(A))^2/\det(B)$.

11번. 다음 물음에 답하시오.

(a) $f(x) = x^2 e^x$ 의 매클로린 급수를 구하시오.

(b) (a)의 결과를 이용하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)2^{n+1}}{n!}$ 의 값을 구하시오.

풀이.

(a) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$이므로, $x^2 e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$ 이다 $(x \in \mathbb{R})$.

(b) 멱급수 전개식 $x^2 e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$ 의 양변을 미분하면

$$(2x + x^2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+2}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

이다. 양변에 $x = 2$를 대입하면 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)2^{n+1}}{n!} = 8e^2$ 이다. □

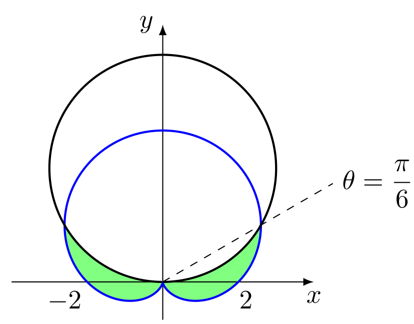
12번. xy평면에서 곡선 $r = 2 + 2\sin\theta$의 내부와 원 $r = 6\sin\theta$의 외부에 놓인 영역의 넓이를 구하시오.

풀이. $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$이므로, 두 곡선은 모두 y축에 대해 대칭이다. 따라서 오른쪽 반평면 $(-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$에 포함되는 영역의 넓이의 2배가 구하려는 넓이이다.

방정식

$$2 + 2\sin\theta = 6\sin\theta$$

로부터 오른쪽 반평면에서 두 곡선의 교점의 편각은 $\theta = \pi/6$이다.



$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$일 때 $2 + 2\sin\theta \le 6\sin\theta$이고, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}$일 때 $6\sin\theta \le 2 + 2\sin\theta$이다. 따라서 구하고자 하는 영역의 넓이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (2 + 2\sin\theta)^2\, d\theta - \int_0^{\pi/6} (6\sin\theta)^2 d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/6} (6 + 8\sin\theta - 2\cos(2\theta)) d\theta - \int_0^{\pi/6} (18 - 18\cos(2\theta)) d\theta \\
&= \Big[6\theta - 8\cos\theta - \sin(2\theta)\Big]_{-\pi/2}^{\pi/6} - \Big[18\theta - 9\sin(2\theta)\Big]_0^{\pi/6} \\
&= \left(4\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) - \left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$

□

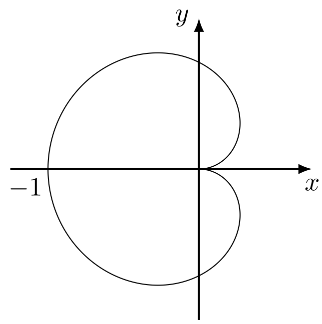
13번. 극좌표로 주어진 곡선 $r = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$를 생각하자.

(a) $0 \le \theta \le 2\pi$일 때 이 곡선의 개형을 xy평면에 그리시오.

(b) xy평면에서 이 곡선 위의 점 P_0 $\big(P_0 \ne (0,0)\big)$에서 접선의 기울기가 0이다. 점 P_0의 편각을 θ_0라 할 때, $\cos\theta_0$의 값을 구하시오. 단, $0 < \theta_0 < 2\pi$이다.

풀이.

(a) 곡선의 개형은 다음과 같다.



(b) $x = r\cos\theta = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\theta$ 이고 $y = r\sin\theta = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\sin\theta$ 이므로, θ_0는

$$0 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\theta_0} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}(\theta_0) = \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin\theta_0 + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos\theta_0}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos\theta_0 - \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin\theta_0}$$

를 만족한다. 그러므로

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin\theta_0 + \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos\theta_0 \\ &= \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\left[3\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - 1\right] \end{aligned}$$

이다. $0 < \dfrac{\theta_0}{2} < \pi$이므로 $\sin\dfrac{\theta_0}{2} > 0$이다. 따라서 $\cos^2\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$ 이고, 이로부터

$$\cos\theta_0 = 2\cos^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{3}$$

이다. □

(참고. $\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right)\cos\theta_0 - \sin\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right)\sin\theta_0 = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2} \ne 0.$)

14번. $\mathbb{R}^3$에서 매개변수곡선 $C(t) = \big(t+1,\, t^2,\, 2t-5\big)$ $(t \in \mathbb{R})$와 평면 $M : 2x+3y-z=4$가 있다. 곡선 C 위의 점 중에서 평면 M과 가장 가까운 점을 P라 하고, 평면 M이 x축, y축, z축과 만나는 점을 각각 Q, R, S라 하자. 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 가지는 사면체의 부피를 구하시오.

(주의: 풀이에 점 P, Q, R, S의 좌표를 반드시 쓰시오.)

풀이. 곡선 C 위의 점 P의 좌표가 $(t+1, t^2, 2t-5)$라 하자. 점 P와 평면 M 사이의 거리는

$$\left|\frac{2t+2+3t^2-2t+5-4}{\sqrt{4+9+1}}\right| = \frac{3t^2+3}{\sqrt{14}}$$

이다. 이 값은 $t=0$일 때 최솟값을 가지므로, 점 P의 좌표는 $(1,0,-5)$이다.

평면이 x축, y축, z축과 만나는 점은 각각 $Q(2,0,0)$, $R\Big(0,\dfrac{4}{3},0\Big)$, $S(0,0,-4)$이므로,

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 1,0,5\rangle, \qquad \overrightarrow{PR} = \Big\langle -1, \frac{4}{3}, 5\Big\rangle, \qquad \overrightarrow{PS} = \langle -1,0,1\rangle$$

이다. $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} = \dfrac{4}{3}\langle 1,-3,1\rangle$ 이므로, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$로 이루어진 평행육면체의 부피는

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right| = 8$$

이다. 따라서 사면체의 부피는 $\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right| = \dfrac{4}{3}$이다. $\square$

[별해] 사면체의 부피를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 4/3 & 0\\ 5 & 5 & 1\end{pmatrix}\right| = \frac{4}{3}.$$

15번. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$의 n제곱을 $A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n}$이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$A^n \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$이 성립할 때, 멱급수 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$의 수렴구간을 구하시오.

(필요하면 $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$라 두고 $A^{n+1} = A\,A^n$임을 이용하여 수열의 점화식을 유도하시오.)

풀이. $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$라 두면 $\begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} \\ z_{n+1} & w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ z_n & w_n \end{pmatrix}$이므로,

$$x_{n+1} = x_n + 2z_n, \qquad y_{n+1} = y_n + 2w_n, \qquad z_{n+1} = 3z_n, \qquad w_{n+1} = 3w_n$$

이다. $z_1 = 0$, $w_1 = 3$, $x_1 = 1$이므로

$$z_n = 0, \qquad w_n = 3^n, \qquad x_n = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

이고 $y_{n+1} = y_n + 2 \cdot 3^n$이다. 그러므로

$$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(y_{k+1} - y_k\right) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^k = 3^n - 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

이다. 따라서 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$이다. 그러면

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \left(A^n\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 3^n & 1 - 3^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^n} \begin{pmatrix} 1 - 3^n \\ 1 \end{pmatrix}$$

이므로 $c_n = \dfrac{1 - 3^n}{3^n}$이다.

$$n \to \infty \text{ 일 때 } \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{3^{n+1} - 1}{3^{n+1} - 3} \to 1$$

이므로 멱급수의 수렴반지름은 1이다.

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 - 3^n}{3^n} = -1 \neq 0$이므로, 일반항 판정법에 의해 $x = \pm 1$ 일 때 이 급수는 발산한다.
따라서 수렴구간은 $(-1, 1)$이다. □