점수

일반수학1(MTH1001) 중간시험

감독관

2019년 4월 22일 (월) 오전 10:00 – 11:40

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

1번 – 9번은 단답형 문제(9번 이외 모두 5점, 9번은 10점)이며, 풀이과정은 쓸 필요가 없습니다. 주어진 답란에 적힌 답으로만 채점되고 부분점수는 없습니다.

1. $A, B \in \mathbb{R}$가 상수라 하자. 모든 실수 x에 대해 다음 등식이 성립할 때 A와 B의 값을 각각 구하시오.

$$8\cosh x + 4\sinh x = A\cosh(x+B)$$

답

2. $x \in \mathbb{R}$에 대해 $f(x) = x^3 - 2x^2 + \tan^{-1} x + \dfrac{1}{\pi}\sin(\pi x) - 3$으로 정의된 함수 f에 대하여 다음 극한값을 구하시오.

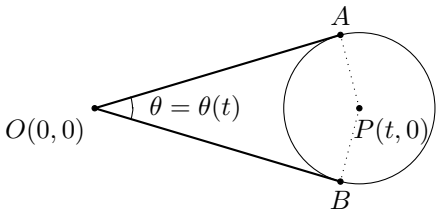
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1-4h) - 2f(1) + f(1+4h)}{h^2}$$

답

3. 점 $x = 0$에서 $f(x) = \tan^{-1}(e^x)$의 일차근사(선형근사)를 이용하여 $\tan^{-1}(e^{0.2})$의 근삿값을 구하되, 소수점 이하 세째자리에서 반올림하여 소수점 이하 둘째자리까지 쓰시오. 단, $\pi \approx 3.1416$이다.

답

4. 평면에서 반지름이 1이고 중심이 $P(t,0)$인 원이 있다 $(t > 1)$. 평면의 원점을 O라 할 때, 두 선분 OA와 OB가 이 원에 접한다고 한다 (그림). $\theta = \angle AOB$라 할 때, t의 함수 $\theta = \theta(t)$의 미분계수 $\theta'(5)$의 값을 구하시오. $(\angle OAP = \angle OBP = \pi/2)$



답

5. 평면에서 곡선 $y = e^{-x}$ 위의 점 $P(t, e^{-t})$ $(t > 0)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 영역을 x축을 중심으로 회전하여 얻은 회전체의 부피를 $V(t)$라고 하자. 이 때 $V(t)$의 최댓값을 구하시오.

답

6. 정적분

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + e^x} \, dx$$

의 값을 구하시오.

답

7. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$가 $\mathbb{R}$에서 연속이고, 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대해

$$\int_0^{x^3} f(t)dt = x^2 \sin \pi x$$

를 만족한다고 하자. 이 때 $f(0)$의 값을 구하시오.

답

8. 평면에서 곡선 $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$과 x축 및 두 직선 $x = 0, x = 2$로 둘러싸인 영역을 직선 $x = 3$을 중심으로 회전하여 얻은 회전체의 부피를 구하시오.

답

감독관

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

9. (각 2점) 다음 각 무한급수가 수렴하는지 발산하는지 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-3n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$ (p 는 양의 상수)

답

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

10번 – 14번은 서술형 문제(각 10점)입니다. 풀이과정을 모두 서술하여야 합니다.

10. 1보다 큰 양수 a에 대하여

$$f(x) = \frac{x^a}{x-1} \quad (1 < x < \infty)$$

일 때, 구간 $(1, \infty)$에서 f의 최솟값을 $g(a)$라고 하자. 이 때 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{g(a)}{a}$의 값을 구하여라.

풀이

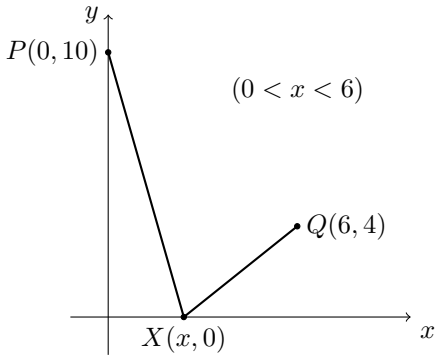
11. 닫힌구간 $I = \left[\frac{2}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right]$에서 $f(x) = \int_{2/\pi}^{x} t \sin\frac{1}{t}\, dt$로 정의된 함수 f에 대하여 다음 질문에 답하여라.

(a) 함수 $f : I \to f(I)$의 역함수 $f^{-1} : f(I) \to I$가 존재함을 보이시오.

(b) $\alpha = f\left(\frac{6}{\pi}\right)$ 이라 할 때, $\int_0^{\alpha} \frac{1}{\left(f^{-1}(x)\right)^3}\, dx$ 의 값을 구하시오.

풀이

12. 평면 $\mathbb{R}^2$에 점 $P(0,10)$, 점 $Q(6,4)$와 x축 위의 점 $X(x,0)$가 있다 (단, $0 < x < 6$). 각 $\angle PXQ$가 최댓값을 가질 때 X의 좌표를 구하시오.



풀이

감독관

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

13. 평면 $\mathbb{R}^2$에서 매개변수방정식

$$x = 1 - \cos t, \quad y = (\sin t)(\sin(2t)) \quad (0 \le t \le \pi)$$

을 만족하는 점 (x, y)의 집합에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) y를 x의 식으로 나타내고, x의 범위를 쓰시오.

(b) (a)에서 구한 함수 $y = y(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역을 y축을 중심으로 회전하여 얻은 입체의 부피를 구하시오.

풀이

14. 특이적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}\,dx$가 수렴하는 상수 $p \in \mathbb{R}$의 범위를 찾고, 이 때 특이적분의 값을 구하시오.

풀이