2019년 일반수학1 중간고사 답과 풀이

단답형 정답

1. $A = 4\sqrt{3}, \quad B = \dfrac{1}{2}\ln 3 \ \ (= \ln\sqrt{3}\,)$
2. 24
3. 0.89
4. $-\dfrac{1}{5\sqrt{6}}$
5. $\dfrac{9\pi}{8e}$
6. π
7. π
8. $6\pi\tan^{-1}(2) - \pi\ln 5$
9. (a) 수렴 (b) 발산 (c) 수렴 (d) 수렴 (e) 발산

단답형 힌트

1. $6e^x + 2e^{-x} = \dfrac{A}{2}e^B e^x + \dfrac{A}{2}e^{-B}e^{-x}$이므로 $Ae^B = 12$이고 $Ae^{-B} = 4$
2. 로피탈 법칙을 두 번 적용할 수 있다. 극한은 $16f''(1)$
3. $f(0.2) \approx f(0) + f'(0)\cdot(0.2) = \dfrac{\pi}{4} + 0.1 \approx 0.8854$
4. $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{t}$이고 $0 < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\theta = 2\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{t}\right)$. 양변을 미분하고 $t = 5$ 대입.
5. 접선의 방정식은 $y - e^{-t} = -e^{-t}(x - t)$. 그러므로 $V(t) = \dfrac{\pi}{3}(t+1)^3 e^{-2t}$.
6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+e^x}\,dx + \int_{-\pi}^{0} \frac{x\sin x}{1+e^x}\,dx$이고 후자에서 $x = -t$로 치환. 구하려는 값은 $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$
7. 양변을 미분하면 $3x^2 f(x^3) = 2x\sin\pi x + \pi x^2\cos\pi x$. 연속성에 의해 $f(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x^3)$.
8. $\displaystyle 2\pi\int_0^2 (3-x)\frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi\left(\int_0^2 \frac{3}{1+x^2}\,dx - \int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx\right)$
9. 극한비교판정법을 사용할 수 있다.
   (a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$과 $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$을 비교
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$이므로 $a_n = -\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$과 $b_n = \dfrac{1}{n}$을 비교
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$이므로 $a_n = \tan^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$과 $b_n = \dfrac{1}{n^2}$을 비교
   (d) $a_n = ne^{-3n^2}$이고 $b_n = e^{-n}$을 비교. $n \to \infty$일 때 $\dfrac{a_n}{b_n} \to 0$이므로 n이 충분히 크면 $0 \le a_n \le b_n$ 이고 $\sum b_n$은 수렴
   (e) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^p}$과 $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$을 비교. $n \to \infty$일 때 $\dfrac{b_n}{a_n} \to 0$이므로 n이 충분히 크면 $0 \le b_n \le a_n$ 이고 $\sum b_n$은 발산

서술형 풀이

10. 1보다 큰 양수 a에 대하여

$$f(x) = \frac{x^a}{x-1}$$

일 때, 구간 $(1, \infty)$에서 f의 최솟값을 $g(a)$라고 하자. 이 때 $\lim_{a\to\infty} \frac{g(a)}{a}$의 값을 구하시오.

풀이. f는 $(1, \infty)$에서 미분가능하고

$$f'(x) = \frac{(a-1)x^{a-1}}{(x-1)^2}\left(x - \frac{a}{a-1}\right)$$

이다. $a > 1$이므로 f의 극점은 $x = \frac{a}{a-1}$이다. f가 $\left(1, \frac{a}{a-1}\right)$에서 감소하고 $\left(\frac{a}{a-1}, \infty\right)$에서 증가하므로 f는 $x = \frac{a}{a-1}$에서 최솟값을 가지고,

$$g(a) = \frac{\left(\frac{a}{a-1}\right)^a}{\frac{1}{a-1}} = (a-1)\left(\frac{a}{a-1}\right)^a$$

이다. 그러므로

$$a \to \infty \text{ 일 때 } \frac{g(a)}{a} = \left(\frac{a}{a-1}\right)^{a-1} = \left(1 + \frac{1}{a-1}\right)^{a-1} \to e$$

이다. □

11. 닫힌구간 $I = \left[\frac{2}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right]$에서 $f(x) = \int_{2/\pi}^{x} t\sin\frac{1}{t}\,dt$ 로 정의된 함수 f에 대하여 다음 질문에 답하시오.

(a) 함수 $f : I \to f(I)$의 역함수 $f^{-1} : f(I) \to I$가 존재함을 보이시오.

(b) $\alpha = f\left(\frac{6}{\pi}\right)$ 이라 할 때, $\int_0^{\alpha} \frac{1}{\left(f^{-1}(x)\right)^3}\,dx$ 의 값을 구하시오.

풀이.

(a) f는 $I = \left[\frac{2}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right]$에서 연속이고 $\left(\frac{2}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right)$에서 미분가능하며

$$\text{모든 } x \in \left(\frac{2}{\pi}, \frac{6}{\pi}\right) \text{ 에 대해 } \ f'(x) = x\sin\frac{1}{x} > 0$$

이므로 $f : I \to f(I)$는 일대일대응이다. 그러므로 역함수 $f^{-1} : f(I) \to I$가 존재한다.

(또는 모든 $t \in I$에 대해 $t\sin\frac{1}{t} > 0$이므로 정적분의 정의(또는 넓이)로부터 f는 I에서 순증가함수이다. 그러므로 역함수 $f^{-1} : f(I) \to I$가 존재한다.) □

(b) $t = f^{-1}(x)$로 치환하면 $\frac{dt}{dx} = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(t)}$이다. 따라서 $dx = f'(t)dt$라 쓸 수 있다.

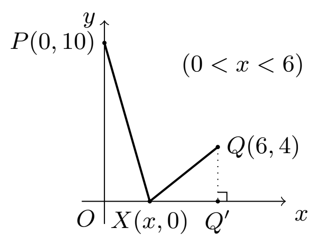
$f\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0$이고 $f\left(\frac{6}{\pi}\right) = \alpha$이므로,

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha} \frac{1}{\left(f^{-1}(x)\right)^3}\,dx &= \int_{2/\pi}^{6/\pi} \frac{f'(t)}{t^3}dt = \int_{2/\pi}^{6/\pi} \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\,dt \\ &= \left[\cos\frac{1}{t}\right]_{2/\pi}^{6/\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이다. □

12. 평면 $\mathbb{R}^2$에 점 $P(0,10)$, 점 $Q(6,4)$와 x축 위의 점 $X(x,0)$가 있다 (단, $0 < x < 6$). 각 $\angle PXQ$가 최댓값을 가질 때 X의 좌표를 구하시오.

풀이. 원점을 $O(0,0)$, Q를 x-축으로 내린 수선의 발을 $Q'(6,0)$이라 하자.



$\angle PXO = \tan^{-1}\left(\dfrac{10}{x}\right)$이고, $\angle QXQ' = \tan^{-1}\left(\dfrac{4}{6-x}\right)$이므로 $\angle PXQ$를 $f(x)$라 하면,

$$f(x) = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{10}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4}{6-x}\right)$$

이다 (단, $0 < x < 6$).

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{10}{x^2+100} - \frac{4}{(6-x)^2+16} &= \frac{10(x^2-12x+52) - 4(x^2+100)}{(x^2+100)(x^2-12x+52)} \\ &= \frac{6(x^2-20x+20)}{(x^2+100)(x^2-12x+52)} \end{aligned}$$

이므로, $f'(x) = 0$을 만족하는 x의 값은 $x = 10 \pm 4\sqrt{5}$ 이다. 따라서 $(0,6)$의 범위에서 f의 임계점은 $x = 10 - 4\sqrt{5}$이다.

$\left(0, 10-4\sqrt{5}\right)$에서 $f' > 0$이므로 f는 이 구간에서 증가함수이고, $\left(10-4\sqrt{5}, 6\right)$에서 $f' < 0$이므로 f는 이 구간에서 감소함수이다. 따라서, 구하려는 좌표는 $(10-4\sqrt{5}, 0)$이다. □

[별해] $\alpha = \angle PXO$, $\beta = \angle QXQ'$이라 두면 $\tan\alpha = 10/x$이고 $\tan\beta = 4/(6-x)$이므로,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{10}{x} + \frac{4}{6-x}}{1 - \frac{10}{x}\cdot\frac{4}{6-x}} = \frac{6(x-10)}{x^2-6x+40}$$

이다. 이 등식에서 $x^2 - 6x + 40 = (x-3)^2 + 31 > 0$이므로,

$$\tan\left(\angle PXQ\right) = \tan\left(\pi - (\alpha+\beta)\right) = \frac{6(10-x)}{x^2-6x+40}$$

이다. 우변의 수식을 $f(x)$라 두자. $0 < x < 6$일 때 $f(x) > 0$이므로, 예각 $\angle PXQ$가 최대가 되는 것과 f가 $(0,6)$에서 최댓값을 가지는 것은 동치이다.

$$f'(x) = \frac{6(x^2-20x+20)}{(x^2-6x+40)^2}$$

이므로 $(0,6)$에서 f의 임계점은 $x = 10 - 4\sqrt{5}$이다. 위와 같이 증감을 고려하면 답은 $(10-4\sqrt{5}, 0)$이다.

13. 평면 $\mathbb{R}^2$에서 매개변수방정식

$$x = 1 - \cos t, \qquad y = (\sin t)(\sin(2t)) \qquad (0 \le t \le \pi)$$

을 만족하는 점 (x, y)의 집합에 대해 다음 물음에 답하시오.

(a) y를 x의 식으로 나타내고, x의 범위를 쓰시오.

(b) (a)에서 구한 함수 $y = y(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역을 y축을 중심으로 회전하여 얻은 입체의 부피를 구하시오.

풀이. (a) 매개변수방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y &= (\sin t)(\sin 2t) \ = 2(\sin^2 t)(\cos t) \\ &= 2(1-\cos^2 t)\cos t \ = 2\cos t - 2\cos^3 t \\ &= 2(1-x) - 2(1-x)^3 \ = 2x(x-1)(x-2) \\ &= 2x^3 - 6x^2 + 4x \qquad (0 \le x \le 2) \end{aligned}$$

(b) $x \in [0,1]$일 때 $y \ge 0$이고 $x \in [1,2]$일 때 $y \le 0$이므로, 주어진 영역을 y축을 중심으로 회전시켜 얻은 회전체의 부피 V를 원통각법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi x(2x^3 - 6x^2 + 4x)dx - \int_1^2 2\pi x(2x^3 - 6x^2 + 4x)dx \\ &= \int_0^1 4\pi(x^4 - 3x^3 + 2x^2)dx - \int_1^2 4\pi(x^4 - 3x^3 + 2x^2)dx \\ &= 4\pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 - 4\pi\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3\right]_1^2 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

□

[참고] ((b)의 다른 계산) $y = 2(1-x) - 2(1-x)^3 \ \ (0 \le x \le 2)$이므로, 위의 적분에서 $u = x - 1$인 치환을 사용하면

$$\begin{aligned} V &= 4\pi\int_{-1}^0 (u^4 + u^3 - u^2 - u)du - 4\pi\int_0^1 (u^4 + u^3 - u^2 - u)du \\ &= 4\pi\int_0^1 (x^4 - x^3 - x^2 + x)dx - 4\pi\int_0^1 (u^4 + u^3 - u^2 - u)du \ = 8\pi\int_0^1 (x - x^3)dx. \end{aligned}$$

14. 특이적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p}\,dx$ 가 수렴하는 상수 $p \in \mathbb{R}$의 범위를 찾고, 이 때 특이적분의 값을 구하시오.

풀이.

(i) $p = 1$일 때 $u = \ln x$로 치환하면

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int u\,du \;= \frac{1}{2}u^2 + C \;= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

이므로

$$\varepsilon \to 0^+ \text{ 일 때 } \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x}\,dx = -\frac{1}{2}(\ln \varepsilon)^2 \to -\infty$$

이다. 따라서 $p = 1$일 때 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$는 $(-\infty$로$)$ 발산한다.

(ii) $p \neq 1$일 때 부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^p}\,dx &= \frac{x^{1-p}}{1-p}\ln x - \frac{1}{1-p}\int x^{-p}\,dx \\ &= \frac{x^{1-p}}{1-p}\ln x - \frac{x^{1-p}}{(1-p)^2} + C\end{aligned}$$

이다. 따라서 $0 < \varepsilon < 1$이면

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{x^p}\,dx &= \left[\frac{x^{1-p}\ln x}{1-p} - \frac{x^{1-p}}{(1-p)^2}\right]_\varepsilon^1 \\ &= -\frac{1}{(1-p)^2} + \varepsilon^{1-p}\left(\frac{\ln \varepsilon}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}\right)\end{aligned}$$

이다. $\varepsilon \to 0^+$일 때 우변은 $1 - p > 0$이면 $-\dfrac{1}{(1-p)^2}$로 수렴하고 $1 - p < 0$이면 $-\infty$로 발산한다.

결론 : (i), (ii)에 따르면 주어진 특이적분은 $p \geq 1$일 때 발산하고 $p < 1$일 때 수렴한다. $p < 1$일 때 특이적분의 값은 $-\dfrac{1}{(1-p)^2}$이다. □