일반수학2(MTH1002) 기말시험

점수

감독관

2019년 12월 16일 (월) 오전 10:00 – 11:40

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

1번 – 10번은 단답형 문제(각 5점)이며, 풀이과정은 쓸 필요가 없습니다. 주어진 답란에 적힌 답만 채점되고 부분점수는 없습니다.

1. xy 평면의 단순 곡선 C가 타원 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 중에서 $y \geq 0$을 만족하는 부분일 때, 선적분 $\displaystyle\int_C \sqrt{2x^2+8y^2}\,ds$의 값을 구하시오.

답

2. 영역 $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ 이고 } 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$의 경계를 C라 하자. 곡선 C가 양의 방향을 가질 때, 다음 선적분의 값을 구하시오.

$$\int_C \left(\tan^{-1}(x^2)+y^2\right)dx + (3xy + y\ln y)dy$$

답

3. 다음 부등식을 모두 만족하는 점 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$의 집합 T의 부피를 구하시오.

$$0 \leq y \leq 9 - x^2 - z^2, \quad x \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x+z \leq 3$$

답

4. 다음 부등식을 모두 만족하는 점 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$의 집합 T의 부피를 구하시오.

$$x^2+(y-1)^2 \leq 1, \quad y \geq |x|, \quad 0 \leq z \leq x^2+y^2.$$

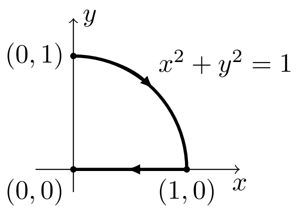
답

5. 매개변수곡선 $C(\theta) = \langle \theta - \sin\theta,\ 1 - \cos\theta \rangle$ $(0 \le \theta \le \pi)$에 대해 다음 선적분의 값을 구하시오.

$$\int_C (5x^4 - 3x^2y^3)dx - 3x^3y^2\,dy$$

답

6. 다음 그림과 같이 xy 평면의 점 $(0,1)$에서 출발하여 원 $x^2 + y^2 = 1$을 따라 점 $(1,0)$까지 진행한 뒤 x축을 따라 원점에 도착하는 곡선을 C라 하자.



선적분 $\int_C (y^3 + x^2)dx + (x^3 + y^2)dy$ 의 값을 구하시오.

답

7. $\mathbb{R}^3$의 원기둥면 $x^2+y^2 = 1$ 중에서 평면 $z = 2x+3$과 xy 평면 사이에 있는 부분을 S라 할 때, $\iint_S z\,dS$ 의 값을 구하시오.

답

8. 평면 $2x + 2y - z = 6$ 중에서 $\mathbb{R}^3$의 곡면(기둥면) $|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

답

감독관

담당교수: 분반: 학과: 학번: 성명:

9. 영역 $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$에 대해 다음 삼중적분의 값을 대칭성을 이용하여 구하시오.

$$\iiint_T (x^3 + \sin y + z^2)\,dV$$

답

10. 영역 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z \le 1 \text{ 이고 } x \ge 0\}$의 경계 S의 외향 단위법선벡터장을 $\mathbf{n}$이라고 하자. 곡면 S를 통한 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \langle 2xy + e^{yz},\ -y^2 + e^{xz},\ z^2 + e^{xy} \rangle$$

의 유량(flux) $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$의 값을 구하시오.

답

11번 – 15번은 서술형 문제(각 10점)입니다. 핵심 풀이과정을 모두 써야 합니다.

11. $\mathbb{R}^3$에서 반구면 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$과 평면 $z = 1$로 둘러싸인 유계 영역의 경계를 S라 할 때 곡면적분 $\iint_S (2-z)\,dS$의 값을 구하시오.

풀이

12. $\mathbb{R}^3$에서 네 평면 $x=0,\ \ y=x,\ \ z=y,\ \ z=3-x-y$로 둘러싸인 사면체를 T라 할 때, 삼중적분 $\iiint_T x\,dxdydz$의 값을 구하시오.

풀이

13. $\mathbb{R}^3$의 포물면 $z=x^2+y^2$ 중에서 평면 $z=3$의 아래에 놓인 유계 곡면을 S라 하자. 곡면 S의 연속 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}<0$을 만족할 때, 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\,\mathbf{i}+yz\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$의 면적분 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$의 값을 구하시오. 필요하면 대칭성을 이용하시오.

풀이

감독관

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

14. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$ 이고 $y\ge x\ge 0\}$ 의 경계 S의 외향 단위법선벡터장을 $\mathbf{n}$이라 하자. $\mathbb{R}^3$에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=x^2yz\,\mathbf{i}+xy^2z\,\mathbf{j}+xyz^2\,\mathbf{k}$$

에 대해 면적분 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 의 값을 구하시오.

풀이

15. 원기둥면 $x^2+y^2=4$와 평면 $x+z=1$이 만나는 곡선을 C라 할 때, 선적분

$$\int_C (y^3+z^3)dx+(z^3+x^3)dy+(x^3+y^3)dz$$

의 값을 **스토크스 정리를 이용하여** 구하시오. 곡선 C의 방향은 C를 xy 평면으로 정사영하여 얻은 곡선이 양의 방향을 가지도록 주어졌다.

풀이