2019년 일반수학2 기말시험 답과 풀이

1. 3π
2. $\frac{1}{6}$
3. 27
4. $\frac{3\pi}{4}+2$
5. $\pi^5-8\pi^3$
6. $-\frac{1}{3}$
7. 11π
8. $\frac{9\pi}{8}$
9. $\frac{4\pi}{15}$
10. $\frac{\pi}{3}$

단답형 풀이

1. 곡선 C를 $x=\sqrt{2}\cos t,\ y=\sin t\ (0\le t\le\pi)$로 매개화하면 $ds=\sqrt{\cos^2 t+2\sin^2 t}\,dt$ 이므로

$$\int_C \sqrt{2x^2+8y^2}\,ds=\int_0^{\pi}(2\cos^2 t+4\sin^2 t)dt=3\pi.$$

2. 그린 정리와 극좌표 치환에 의해

$$\int_C \big(\tan^{-1}(x^2)+y^2\big)dx+(3xy+y\ln y)dy=\iint_R(3y-2y)dA=\int_0^{\pi/3}\int_0^1 r^2\sin\theta\,drd\theta=\frac{1}{6}.$$

3. $D=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2\mid x\ge 0,\ z\ge 0,\ x+z\le 3\}$이라 두면

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid (x,z)\in D \text{ 이고 } 0\le y\le 9-x^2-z^2\}$$

이다. 따라서 T의 부피는

$$\iint_D\int_0^{9-x^2-z^2}dV=\int_0^3\int_0^{3-x}(9-x^2-z^2)dzdx=\int_0^3\Big((x+3)(x-3)^2+\frac{1}{3}(x-3)^3\Big)dx=27.$$

4. 집합 T를 원기둥좌표로 표현하면 $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4},\ 0\le r\le 2\sin\theta,\ 0\le z\le r^2$ 이므로, T의 부피는

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2}r\,dzdrd\theta=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{2\sin\theta}r^3drd\theta=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}4\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3\pi}{4}+2.$$

5. $f(x,y) = x^5 - x^3y^3$ 이라 두면 주어진 선적분은

$$\int_C f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = f(x,y)\Big|_{C(0)}^{C(\pi)} = f(\pi,2) - f(0,0) = \pi^5 - 8\pi^3.$$

6. 곡선 C_1, C_2를 각각 $C_1(t) = (t,0)$ $(0 \le t \le 1)$와 $C_2(t) = (\cos t, \sin t)$ $(0 \le t \le \pi/2)$로 매개화하면 $-C = C_1 + C_2$이므로 구하려는 선적분은

$$\begin{aligned}&-\int_{C_1} (y^3+x^2)dx + (x^3+y^2)dy - \int_{C_2} (y^3+x^2)dx + (x^3+y^2)dy \\ &= -\int_0^1 t^2 dt - \int_0^{\pi/2} (\cos^4 t - \sin^4 t - \cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t)dt = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

여기에서 $\cos^4 t - \sin^4 t = (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t) = \cos(2t)$임을 이용하였다.

7. 곡면 S를

$$X(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z) \qquad (0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2\cos\theta + 3)$$

로 매개화하면 $dS = \|X_\theta \times X_z\| d\theta dz = d\theta dz$이다. 구하려는 값은

$$\iint_S z\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\cos\theta+3} z\, dz d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (2\cos\theta+3)^2 d\theta = 11\pi.$$

8. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|^{2/3} + |y|^{2/3} \le 1\}$이라 두고 $f(x,y) = 2x + 2y - 6$ 이라 하면 구하려는 넓이는

$$\iint_S dS = \iint_R \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}\, dxdy = \iint_R 3\, dxdy = 3\,\mathrm{area}(R)$$

이다. ∂R을 $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi)$로 매개화하면 구하려는 넓이는

$$\frac{3}{2}\int_{\partial R} -ydx + xdy = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} 3(\cos^2 t \sin^4 t + \sin^2 t \cos^4 t)dt = \frac{9}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\, dt = \frac{9\pi}{8}.$$

9. 영역 T는 yz 평면과 xz 평면에 대해 대칭이고 $(-x)^3 = -x^3$이고 $\sin(-y) = -\sin y$이다. 주어진 삼중적분의 값은 구면좌표 치환에 의해

$$\iiint_T z^2 dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (\rho\cos\phi)^2 \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta = 2\pi\Big(\int_0^1 \rho^4 d\rho\Big)\Big(\int_0^\pi \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi\Big) = \frac{4\pi}{15}.$$

10. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1 \text{ 이고 } x \ge 0\}$이라 두면 문제에 주어진 삼차원 영역은

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \text{ 이고 } x^2 + y^2 \le z \le 1\}$$

이다. $\nabla \cdot \mathbf{F}(x,y,z) = 2z$ 이므로, 주어진 면적분의 값은 발산정리에 의해

$$\iint_D \int_{x^2+y^2}^1 2z\, dzdxdy = \iint_D (1 - (x^2+y^2)^2)dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 (r - r^5)drd\theta = \frac{\pi}{3}.$$

11. $\mathbb{R}^3$에서 반구면 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$과 평면 $z = 1$로 둘러싸인 유계 영역의 경계를 S라 할 때 곡면적분 $\displaystyle\iint_S (2-z)\,dS$의 값을 구하시오.

풀이. 곡면 S는 다음과 같이 반구면의 일부 S_1과 원판 S_2로 이루어져 있다.

$$S_1 : X(\phi,\theta) = (2\sin\phi\cos\theta,\ 2\sin\phi\sin\theta,\ 2\cos\phi) \qquad \Big(0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi\Big),$$

$$S_2 : z = 1, \quad x^2+y^2 \le 3.$$

S_1의 면적소는 $dS = 4\sin\phi\, d\phi d\theta$ 이므로,

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (2-z)dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} 8(1-\cos\phi)\sin\phi\, d\phi d\theta \\ &= 16\pi\int_0^{\pi/3}(\sin\phi - \cos\phi\sin\phi)d\phi \\ &= 16\pi\Big[-\cos\phi - \frac{1}{2}\sin^2\phi\Big]_0^{\pi/3} = 2\pi\end{aligned}$$

이다. 그리고

$$\iint_{S_2}(2-z)dS = \iint_{S_2} dS = \mathrm{area}(S_2) = 3\pi$$

이다. $S = S_1 \cup S_2$이므로,

$$\iint_S (2-z)dS = \iint_{S_1}(2-z)dS + \iint_{S_2}(2-z)dS = 5\pi.$$

□

12. $\mathbb{R}^3$에서 네 평면 $x=0,\ \ y=x,\ \ z=y,\ \ z=3-x-y$로 둘러싸인 사면체를 T라 할 때, 삼중적분 $\displaystyle\iiint_T x\,dxdydz$의 값을 구하시오.

풀이. $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq x,\ x+2y\leq 3\}$이라 두면 영역 T를

$$T:\ (x,y)\in D,\quad y\leq z\leq 3-x-y$$

으로 나타낼 수 있다. D를

$$D:\ 0\leq x\leq 1,\quad x\leq y\leq \frac{3-x}{2}$$

로 다시 쓰면 푸비니 정리에 의해

$$\begin{aligned}\iiint_T x\,dxdydz &= \iint_D \int_y^{3-x-y} x\,dzdxdy\\ &= \iint_D (3x-x^2-2xy)dxdy\\ &= \int_0^1\int_x^{(3-x)/2}(3x-x^2-2xy)dydx\\ &= \frac{9}{4}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx\\ &= \frac{3}{16}.\end{aligned}$$

□

13. $\mathbb{R}^3$의 포물면 $z = x^2 + y^2$ 중에서 평면 $z = 3$의 아래에 놓인 유계 곡면을 S라 하자. 곡면 S의 연속 단위법선벡터장 $\mathbf{n}$이 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$을 만족할 때, 벡터장 $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$의 면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$의 값을 구하시오. 필요하면 대칭성을 이용하시오.

풀이. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$이라 하고, 이변수 함수 $g : D \to \mathbb{R}$를

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

이라 정의하자. 주어진 포물면은 g의 등위면이므로, 점 (x, y, z)에서 $\nabla g(x, y, z) = (2x,\, 2y,\, -1)$은 포물면 $z = x^2 + y^2$에 수직이다. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} < 0$이므로

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}(2x,\, 2y,\, -1)$$

이다. 한편, 주어진 포물면의 면적소는

$$dS = \sqrt{1 + \|\nabla g(x, y)\|^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

이므로, (D와 피적분함수의) 대칭성과 극좌표 치환에 의해

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_S (xy,\, yz,\, xz) \cdot \frac{(2x,\, 2y,\, -1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS = \iint_S \frac{2x^2 y + (2y^2 - x)z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS \\
&= \iint_D \big(2x^2 y + (2y^2 - x)(x^2 + y^2)\big) dxdy \\
&= \iint_{x^2 + y^2 \leq 3} 2y^2 (x^2 + y^2) dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} 2r^5 \sin^2\theta\, dr d\theta \;= 9\pi.
\end{aligned}$$

□

[별해] (발산정리를 이용한 풀이) $S_1 = \{(x, y, 3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$이라 두면 $S \cup S_1$은 영역

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 3 \text{ 이고 } \; x^2 + y^2 \leq z \leq 3\}$$

의 경계이다. ∂T의 외향 단위법선벡터장을 $\mathbf{n}_1$이라 두면 S_1에서는 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}$이고 S에서는 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$이다. 따라서 발산정리와 대칭성 및 극좌표 치환에 의해

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS + \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV \\
&= \iint_{x^2 + y^2 \leq 3} \int_{x^2 + y^2}^{3} (x + y + z) dz dx dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 3} (9 - (x^2 + y^2)^2) dxdy \;= 9\pi
\end{aligned}$$

이다. S_1에서 $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 3x$ 이므로, 대칭성에 의해 $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 3} 3x\, dxdy = 0$이다.
구하려는 답은 위의 등식으로부터 9π 이다. □

14. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}$ 이고 $\ y\ge x\ge 0\}$의 경계 S의 외향 단위법선벡터장을 $\mathbf{n}$이라 하자. $\mathbb{R}^3$에서 정의된 벡터장

$$\mathbf{F}(x,y,z)=x^2yz\,\mathbf{i}+xy^2z\,\mathbf{j}+xyz^2\,\mathbf{k}$$

에 대해 면적분 $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ 의 값을 구하시오.

풀이. 주어진 삼차원 영역을 T라 하자. T를 구면좌표로 나타내면

$$T:\ 0\le\rho\le 2,\quad 0\le\phi\le\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

이고

$$(\nabla\cdot\mathbf{F})(x,y,z)=6xyz$$

이므로, 발산정리에 의해

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV=\iiint_T 6xyz\,dxdydz\\ &=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 6\rho^3\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta\sin\theta\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta\\ &=\Big(\int_0^2 6\rho^5 d\rho\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\sin^3\phi\cos\phi\,d\phi\Big)\Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\Big)\\ &=4.\end{aligned}$$

□

15. 원기둥면 $x^2+y^2=4$와 평면 $x+z=1$이 만나는 곡선을 C라 할 때, 선적분

$$\int_C (y^3+z^3)dx+(z^3+x^3)dy+(x^3+y^3)dz$$

의 값을 **스토크스 정리를 이용하여** 구하시오. 곡선 C의 방향은 C를 xy 평면으로 정사영하여 얻은 곡선이 양의 방향을 가지도록 주어졌다.

풀이. 편의상 $\mathbf{F}(x,y,z)=(y^3+z^3,\ z^3+x^3,\ x^3+y^3)$이라 두면

$$(\nabla\times\mathbf{F})(x,y,z)=\langle\,3y^2-3z^2,\ 3z^2-3x^2,\ 3x^2-3y^2\,\rangle$$

이다. 평면 $x+z=1$ 중에서 원기둥면 $x^2+y^2=4$로 둘러싸인 유계 곡면을 S라 두면 $C=\partial S$이고 벡터 $\langle 1,0,1\rangle$은 S에 수직이다. 곡선 C를 xy 평면에 내린 정사영이 양의 방향을 가지므로, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}>0$ 이다. 따라서

$$\mathbf{n}(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

이다. 평면 $x+z=1$은

$$g(x,y)=1-x \qquad (x^2+y^2\le 4)$$

로 정의된 함수 g의 그래프이므로 $dS=\sqrt{2}\,dxdy$ 이다.

따라서 스토크스 정리에 의해

$$\begin{aligned}
&\int_C (y^3+z^3)dx+(z^3+x^3)dy+(x^3+y^3)dz\\
&=\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS\ =\iint_S\frac{3}{\sqrt{2}}(x^2-z^2)dS\\
&=\iint_{x^2+y^2\le 4}3(x^2-(1-x)^2)dxdy\\
&=3\iint_{x^2+y^2\le 4}(2x-1)dxdy\\
&=3\int_0^{2\pi}\int_0^2(2r^2\sin\theta-r)drd\theta=-12\pi.
\end{aligned}$$

□