점수

일반수학2(MTH1002) 중간시험

감독관

2019년 10월 21일 (월)　오전 10:00 – 11:40

담당교수:　**분반:**　**학과:**　**학번:**　**성명:**

1번 – 10번은 단답형 문제(각 5점)이며, 풀이과정은 쓸 필요가 없습니다. 주어진 답란에 적힌 답으로만 채점되고 부분점수는 없습니다.

1. (a) 구면좌표에서 $\rho^2\cos(2\phi) = -1$ 로 표현된 곡면을 직교좌표 방정식으로 서술하시오.
(b) 직교좌표방정식 $x^2 + y^2 + z^2 = x$ 를 구면좌표방정식으로 바꾸어 서술하시오.

답
(a)
(b)

2. 주면좌표(원기둥좌표)로 다음과 같이 서술된 입체의 부피를 구하시오.

$$0 \le \frac{r}{\sqrt{3}} \le z \le 1$$

답

3. 점 $(1,2,2)$에서 삼변수 함수 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 의 선형근사(일차근사)를 이용하여 다음의 근삿값을 구하시오.

$$\sqrt{(1.02)^2 + (1.98)^2 + (2.04)^2}$$

답

4. $\mathbb{R}^2$에서 다음과 같이 정의된 함수에 대해 $f_{xy}(0,0)$과 $f_{yx}(0,0)$의 값을 각각 구하시오.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^2}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

해당 극한이 존재하지 않으면 빈 칸에 ‘없음’이라 쓰시오.

답
$f_{xy}(0,0) =$　　　　,　　$f_{yx}(0,0) =$

5. $\mathbb{R}^2$에서 정의된 이변수 함수 $f(x,y)$의 2계 편도함수들이 모두 존재하고 연속이라 하자.

$$g(s,t) = f(2s-t,\, t-3s)$$

일 때, 아래의 정보를 이용하여 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial s^2}(1,1)$ 의 값을 구하시오.

$$f_{xx}(1,1)=2,\quad f_{xy}(1,1)=4,\quad f_{yy}(1,1)=2$$
$$f_{xx}(1,-2)=-4,\quad f_{xy}(1,-2)=-2,\quad f_{yy}(1,-2)=2$$

답

6. 함수 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$가 $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{y-x}$ 로 주어졌을 때, 이 함수의 안장점을 모두 구하시오.

답

7. 실수 x, y가 등식 $x^2+xy+y^2=14$를 만족할 때 $4x+5y$의 최댓값을 구하시오.

답

8. 반복적분 $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 x\sqrt{y}\,dx\,dy$를 계산하시오.

답

감독관

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

9. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$ 일 때, 이중적분 $\displaystyle\iint_R (1-x)dA$를 계산하시오.

답

10. 다음 반복적분을 계산하시오.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[4]{y}}^1 \frac{1}{x^5+1} dxdy$$

답

11번 – 15번은 서술형 문제(각 10점)입니다. 핵심 풀이과정을 모두 써야 합니다.

11. 집합 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + yz + zx = x + z^2\}$은 모든 점에서 접평면을 가지는 곡면임이 알려져 있다. 이 곡면 위의 점 중에서 접평면이 xy 평면과 평행인 점(들)을 모두 구하시오.

풀이

12. $x, y, z \in \mathbb{R}$가 등식 $xe^z - y + \sin z = 0$을 만족하면 z는 점 $(2, 2, 0)$ 근방에서 x, y의 미분가능한 함수로 나타난다는 사실이 알려져 있다.

이를 이용하여 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,2)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,2)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,2)$의 값을 각각 구하시오.

풀이

13. 구면좌표로 $\rho = 2\sin\phi\sin\theta$로 표현된 곡면 S 위의 점들 중에서 구면좌표로 $\phi = \theta = \dfrac{\pi}{6}$에 해당하는 점을 P라 하자. 그리고 점 P에서 곡면 S에 접하는 평면의 단위법선벡터 중에서 xy평면의 위쪽을 향하는 벡터를 $\mathbf{n}$이라 하자 $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} > 0)$.

점 P에서 $\mathbf{n}$ 방향으로 $f(x, y, z) = 4x^2 + \dfrac{4}{7}y^2 + z$의 방향미분계수(방향도함수)를 구하시오. ($f$의 식은 직교좌표로 서술되었다.)

풀이

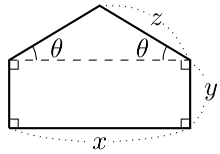
감독관

담당교수: **분반:** **학과:** **학번:** **성명:**

14. 영역 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$에서 정의된 함수 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

풀이

15. 그림과 같이 밑각이 θ인 이등변삼각형을 직사각형에 이어붙여 만든 오각형의 둘레의 길이가 6으로 일정하다. 이 오각형의 넓이가 최대일 때 각 변의 길이를 구하시오.



$\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

(힌트: x, y, θ의 함수)

풀이