2019년 일반수학2 중간시험 답과 풀이

1. (a) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (b) $\rho = \sin\phi\cos\theta$

2. π

3. 3.02

4. $f_{xy}(0,0) = 1\,,\quad f_{yx}(0,0) = 0$

5. 26

6. $(1, -1)$

7. $14\sqrt{2}$

8. $\dfrac{32}{3}$

9. 2

10. $\dfrac{1}{5}\ln 2$

단답형 힌트

1. (a) $\rho^2\cos(2\phi) = \rho^2\cos^2\phi - \rho^2\sin^2\phi = z^2 - (x^2+y^2)$

2. 이 입체는 높이가 1이고 밑면의 반지름이 $\sqrt{3}$ 인 원뿔.

3. $\nabla f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\langle x,\, y,\, z\rangle \ \ ((x,y,z) \neq (0,0,0))$. 선형근사(일차근사)에 의해 $f(1.02, 1.98, 2.04) \approx f(1,2,2) + \nabla f(1,2,2)\cdot\langle 0.02, -0.02, 0.04\rangle = 3.02$

4. 정의에 의해 $f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$이고 $f_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$

   $(x,y)\neq(0,0)$이면 $f_x(x,y) = \dfrac{y^3(x^4+y^2)-4x^4y^3}{(x^4+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \dfrac{3xy^2(x^4+y^2)-2xy^4}{(x^4+y^2)^2}.$

   정의에 의해 $f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\dfrac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y},\ f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0}\dfrac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}.$

   (함수 f가 원점일 때와 아닐 때 따로 정의되었으므로, 미분 정리를 그대로 적용할 수 없다.)

5. 연쇄법칙에 의해 $g_s(s,t) = 2f_x(2s-t,\, t-3s) - 3f_y(2s-t,\, t-3s)$이므로,

$$\begin{aligned} g_{ss}(s,t) &= 2\frac{\partial}{\partial s}\big[f_x(2s-t,\, t-3s)\big] - 3\frac{\partial}{\partial s}\big[f_y(2s-t,\, t-3s)\big] \\ &= 4f_{xx}(2s-t,\, t-3s) - 12f_{xy}(2s-t,\, t-3s) + 9f_{yy}(2s-t,\, t-3s). \end{aligned}$$

6. $\nabla f(x,y) = e^{y-x}\langle 2x-x^2-y^2,\, 2y+x^2+y^2\rangle$이므로 임계점은 $(0,0)$, $(1,-1)$. 이 두 점에서 $\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{xx}(1,-1) & f_{xy}(1,-1) \\ f_{yx}(1,-1) & f_{yy}(1,-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2e^{-2} \\ 2e^{-2} & 0\end{pmatrix}$

7. 연립방정식 $4 = \lambda(2x+y),\ \ 5 = \lambda(x+2y),\ \ x^2+xy+y^2 = 14$의 해를 구한다. 앞의 두 방정식으로부터 $\lambda\neq 0$이고, $x = 1/\lambda$, $y = 2/\lambda$ 이다. 이를 세 번째 등식에 대입한다.

8. $\displaystyle\int_0^4\int_0^2 x\sqrt{y}\,dxdy = \int_0^4\left[\frac{1}{2}x^2\sqrt{y}\right]_{x=0}^{x=2}dy = \int_0^4 2\sqrt{y}\,dy.$

9. 푸비니 정리에 의해

$$\begin{aligned} \iint_R (1-x)dA &= \int_{-1}^0\int_{-1-x}^{1+x}(1-x)dydx + \int_0^1\int_{x-1}^{1-x}(1-x)dydx \\ &= \int_{-1}^0(2-2x^2)dx + \int_0^1 2(x-1)^2dx. \end{aligned}$$

10. $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt[4]{y}}^1\frac{1}{x^5+1}dxdy = \int_0^1\int_0^{x^4}\frac{1}{x^5+1}dydx = \int_0^1\frac{x^4}{x^5+1}dx = \frac{1}{5}\ln(x^5+1)\Big|_0^1$

11. 집합 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy + yz + zx = x + z^2\}$은 모든 점에서 접평면을 가지는 곡면임이 알려져 있다. 이 곡면 위의 점 중에서 접평면이 xy 평면과 평행인 점(들)을 모두 구하시오.

풀이. $F(x, y, z) = xy + yz + zx - x - z^2$이라 두면

$$\nabla F(x, y, z) = \langle y + z - 1,\ x + z,\ y + x - 2z \rangle$$

이다. 점 $P(x, y, z)$에서 접평면이 xy 평면과 평행하면 $\nabla F(P)$가 z축과 평행하다. 따라서

$$\langle y + z - 1, x + z, y + x - 2z \rangle = \nabla F(P) = t\langle 0, 0, 1 \rangle$$

를 만족하는 실수 t가 존재한다. 그러므로

$$y + z - 1 = 0 \text{ 이고 } \ x + z = 0$$

이다. 이 두 방정식과 등식 $F(x, y, z) = 0$을 연립해서 풀면

$$(x, y, z) = (0, 1, 0) \quad \text{또는}$$
$$(x, y, z) = \Big(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Big)$$

이다. □

12. $x, y, z \in \mathbb{R}$가 등식 $xe^z - y + \sin z = 0$을 만족하면 z는 점 $(2,2,0)$ 근방에서 x, y의 미분가능한 함수로 나타난다는 사실이 알려져 있다.

이를 이용하여 $\frac{\partial z}{\partial x}(2,2)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(2,2)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2,2)$의 값을 각각 구하시오.

풀이. 편의상 $F(x,y,z) = xe^z - y + \sin z$이라 두자. $\mathbb{R}^2$의 점 $(x,y) = (2,2)$ 근방에서 항등식

$$F(x, y, z(x,y)) = 0$$

의 양변을 x와 y에 대해 각각 편미분하면

$$F_x(x,y,z) + F_z(x,y,z) z_x(x,y) = 0,$$
$$F_y(x,y,z) + F_z(x,y,z) z_y(x,y) = 0$$

이다. 이를 정리하면

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{e^z}{xe^z + \cos z},$$
$$z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{1}{xe^z + \cos z}$$

이다. 여기에 $z(2,2) = 0$임을 이용하면

$$z_x(2,2) = -\frac{1}{3}, \qquad z_y(2,2) = \frac{1}{3}$$

을 얻는다. 한편, 등식 $z_y(x,y) = \frac{1}{xe^z + \cos z}$의 양변을 x에 대해 편미분하면

$$z_{yx}(x,y) = -\frac{e^z + xe^z z_x(x,y) - (\sin z) z_x(x,y)}{(xe^z + \cos z)^2}$$

이므로,

$$z_{yx}(2,2) = -\frac{1}{27}$$

이다. □

[별해] $z = z(x,y)$가 항등적으로 $xe^{z(x,y)} - y + \sin z(x,y) = 0$을 만족하므로, 양변을 각각 x와 y로 편미분하면

$$e^z + xe^z z_x(x,y) + (\cos z) z_x(x,y) = 0, \qquad xe^z z_y(x,y) - 1 + (\cos z) z_y(x,y) = 0$$

이다. 뒤의 항등식을 x에 대해 편미분하면

$$(xe^z + \cos z) z_{yx}(x,y) + \Big(e^z + xe^z z_x(x,y) - (\sin z) z_x(x,y)\Big) z_y(x,y) = 0$$

이다. 위의 식에 $(x,y) = (2,2)$를 대입하고 $z(2,2) = 0$임을 이용하여 정리한다.

13. 구면좌표로 $\rho = 2\sin\phi\sin\theta$ 로 표현된 곡면 S 위의 점들 중에서 구면좌표로 $\phi = \theta = \dfrac{\pi}{6}$ 에 해당하는 점을 P라 하자. 그리고 점 P에서 곡면 S에 접하는 평면의 단위법선벡터 중에서 xy 평면의 위쪽을 향하는 벡터를 $\mathbf{n}$이라 하자 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k} > 0)$.

점 P에서 $\mathbf{n}$ 방향으로 $f(x,y,z) = 4x^2 + \dfrac{4}{7}y^2 + z$ 의 방향미분계수(방향도함수)를 구하시오. (f의 식은 직교좌표로 서술되었다.)

풀이. $\phi = \theta = \dfrac{\pi}{6}$일 때 $\rho = \dfrac{1}{2}$ 이므로, 점 P를 직교좌표로 나타내면 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 이다.

한편, 등식 $\rho = 2\sin\phi\sin\theta$ 의 양변에 ρ를 곱하여 곡면 S를 직교좌표로 나타내면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

이다. 편의상 $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2y$ 로 나타내면 $\nabla G(P) = \left\langle \dfrac{\sqrt{3}}{4}, -\dfrac{7}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2} \right\rangle$ 은 점 P에서 S에 접하는 평면의 법선벡터이므로,

$$\mathbf{n} = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{7}{8}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right\rangle$$

이다.

$\nabla f(x,y,z) = \left\langle 8x,\ \dfrac{8y}{7},\ 1 \right\rangle$ 이므로 $\nabla f(P) = \left\langle \sqrt{3},\ \dfrac{1}{7},\ 1 \right\rangle$ 이다. 따라서 구하려는 방향미분계수는 $D_{\mathbf{n}} f(P) = \nabla f(P)\cdot\mathbf{n} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$ 이다. □

14. 영역 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$에서 정의된 함수 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 구하시오.

풀이. D의 내부 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$의 임계점을 찾자. 연립방정식

$$f_x(x, y) = 2x - 1 = 0, \qquad f_y(x, y) = 4y = 0$$

으로부터 D의 내부의 임계점은 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이고, $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}$ 이다.

D의 경계 $x^2 + y^2 = 1$ 에서 f의 최댓값과 최솟값을 구한다. 이를 위해 경계를 $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$로 매개화하면

$$\begin{aligned} f(\cos t, \sin t) &= \cos^2 t + 2\sin^2 t - \cos t \\ &= \cos^2 t + 2(1 - \cos^2 t) - \cos t \\ &= -\cos^2 t - \cos t + 2 \qquad (0 \leq t \leq 2\pi) \end{aligned}$$

이다. 따라서 이 식은 $\cos t = -1/2$일 때 최댓값 $9/4$를 가지고, $\cos t = 1$ 일 때 최솟값 0을 가진다.

임계점 $(1/2, 0)$에서 함숫값과 경계에서 최대최소를 비교한다. f는 점 $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 가지고, 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$에서 최솟값 $-\frac{1}{4}$ 을 가진다. □

[별해] 경계 $x^2 + y^2 = 1$에서 f의 극대극소 구하기:

제약조건 $x^2 + y^2 = 1$을 만족하는 점 (x, y)에서 f가 극값을 가지면 어떤 상수 λ에 대해

$$\langle 2x - 1,\ 4y\rangle = \lambda\langle 2x,\ 2y\rangle$$

이다. 두 번째 방정식으로부터 $\lambda = 2$이거나 $y = 0$이다.

(1) $\lambda = 2$이면 첫 번째 방정식으로부터 $x = -1/2$이고, 따라서 $y = \pm\sqrt{3}/2$이다. 이 때 함숫값은 $9/4$이다.

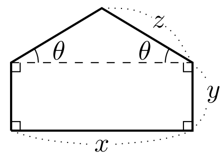
(2) $y = 0$이면 $x = \pm 1$이다. 이 때 함숫값은 0 또는 2이다.

[별해2] 경계에서 f의 극대극소 구하기:

$y^2 = 1 - x^2$이므로 $x^2 + 2y^2 - x = -x^2 - x + 2 = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ $(-1 \leq x \leq 1)$이다.

따라서 f의 함숫값은 $x = -1/2$일 때 $9/4$, $x = -1$일 때 2, $x = 1$일 때 0이다.

15. 그림과 같이 밑각이 θ인 이등변삼각형을 직사각형에 이어붙여 만든 오각형의 둘레의 길이가 6으로 일정하다. 이 오각형의 넓이가 최대일 때 각 변의 길이를 구하시오.



$\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(힌트: x, y, θ의 함수)

풀이. 빗변의 길이는

$$z = \frac{x}{2\cos\theta} = \frac{x}{2}\sec\theta$$

이다. 오각형의 둘레의 길이가 6이므로

$$g(x, y, \theta) := x + 2y + x\sec\theta - 6 = 0 \tag{1}$$

이다. 그리고 임의의 x, y, θ에 대해 $\nabla g(x, y, \theta) = \langle 1 + \sec\theta, 2, x\sec\theta\tan\theta\rangle \neq \langle 0, 0, 0\rangle$이다.

오각형의 넓이를 $f(x, y, \theta)$라 하면

$$f(x, y, \theta) = xy + \frac{x}{2} \cdot z\sin\theta = xy + \frac{x^2}{4}\tan\theta$$

이다. 제약조건 (1)을 만족하는 점 (x, y, θ)에서 f가 최댓값을 가지면 Lagrange 승수법에 의해 어떤 상수 $\lambda \in \mathbb{R}$가 존재하여 $\nabla f(x, y, \theta) = \lambda\nabla g(x, y, \theta)$가 성립한다. 이를 다시 쓰면

$$y + \frac{x}{2}\tan\theta = \lambda(1 + \sec\theta), \tag{2}$$

$$x = 2\lambda, \tag{3}$$

$$\frac{x^2}{4}\sec^2\theta = \lambda x\sec\theta\tan\theta \tag{4}$$

이다. $x > 0$이고 $\sec\theta \geq 1$이므로 (4)로부터 $x = 4\lambda\sin\theta$이다. (3)에 의해 $\lambda \neq 0$이고, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$이다. 이로부터 $\sec\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$이고 $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이며, (2)에 의해

$$x = 2\lambda, \qquad y = \lambda(1 + \sec\theta) - \frac{x}{2}\tan\theta = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\lambda$$

이다. 이 결과를 $g(x, y, \theta) = 0$에 대입하면 $\lambda = \dfrac{6}{4 + 2\sqrt{3}} = 6 - 3\sqrt{3}$이다.

따라서 각 변의 길이는 $x = 12 - 6\sqrt{3}$, $y = 3 - \sqrt{3}$, $z = 4\sqrt{3} - 6$이다. □