★**단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점이고 옳은 답이 아닐 경우 0점 처리)

1번. 반복적분 $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3+1}\, dy \right) dx$ 를 구하시오.

2번. 2차원 영역 D가 네 직선 $y = x+1$, $y = x-3$, $y = -\frac{1}{3}x+1$, $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$로 둘러싸인 사각형 영역일 때, 이중적분 $\iint_D (x+3y)(x-y)dxdy$의 값을 구하시오.

3번. 곡면 S가 $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$이면서 $z \le 3$로 정의될 때, 면적분 $\iint_S z\, dS$를 구하시오.

4번. $(x-1)^2 + y^2 \le 1$이고 $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$인 곡면의 넓이를 구하시오.

5번. xyz-축의 3차원공간 내에 원점이 중심이고 반지름이 4인 구면에서 $x^2+y^2 \le 12$인 곡면의 넓이를 구하시오.

6번. $1 \le t \le 2$범위에서 매개변수곡선 $C(t) = (\,t + \sin^2 \pi t,\, \cos^2 \pi t,\, t\,)$일 때, 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (\,2xyz,\, x^2z,\, x^2y\,)$의 선적분 $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$를 구하시오.

7번. V가 평면 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+2y+z=6$들로 둘러싸인 3차원 입체영역이고, 벡터장 $\mathbf{F} = \left(x + e^{y^2} + \sin z,\, y^2 + \sqrt{z},\, z + \frac{1}{x^2+y^2+1} \right)$가 정의되어 있다. 곡면 $S = \partial V$가 V의 경계면이고, $\mathbf{n}$이 S상에 정의된 외향법선벡터라고 할 때, 벡터장 $\mathbf{F}$의 면적분 $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$를 구하시오.

8번. 선적분 $\int_C (x^4+3y)\, dx + (4x - e^{y^2})\, dy$을 $0 \le t \le 2\pi$에서의 매개변수곡선 $C(t) = (\cos t,\, \sin t)$ 상에서 계산한 답을 구하시오.

★ **서술형**: 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점이고 풀이과정의 논리가 맞을 경우 가산점 있음)

9번. $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + \frac{y^2}{4} + 4z^2 \le 1 \right\}$ 일 때, 삼중적분 $\iiint_V z^2\, dxdydz$를 구하시오.

10번. 삼중적분 $\iiint_V x^2+y^2\, dxdydz$ 를 구하시오. 여기서, V는 $y \le |x|$와 $x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1$을 만족하는 3차원 영역이다.

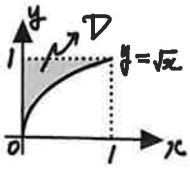
11번. $0 \le t \le 2\pi$에서 매개변수곡선 $C(t) = (\,x(t),\, y(t),\, z(t)\,) = (\,a + b\cos t,\, 0,\, b\sin t\,)$을 z축 둘레로 회전시킨 회전곡면의 넓이를 구하여라. 단, 여기서 $a > b > 0$이다.

12번. 2차원 벡터장 $\mathbf{F}(x,y) = (\,3x^2+y^2,\, 2xy-3\,)$가 $\mathbb{R}^2$ 전체영역에서 보존장임을 보여라. 그리고 $0 \le t \le \pi$ 범위에서 $C(t) = (\,t\sin t, e^t \cos t\,)$ 일 때, 선적분 $\int_C \mathbf{F}{\cdot}ds$를 **F의 포텐셜 함수 $\phi(x,y)$를 이용**하여 구하시오.

13번. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |y| \le x,\, (x-1)^2+y^2 \le 1\}$ 일 때, 선적분 $\int_{\partial D} (e^{-x^2} - y)\, dx + (xy + \sin y)\, dy$ 를 구하시오. 여기서, 곡선 ∂D의 방향은 반시계방향이다.

14번. 곡선 C는 원기둥면 $x^2+y^2=1$과 평면 $y+z=2$의 교선이고 z-축에 대해 반시계방향이다. Stokes정리를 이용하여 선적분 $\int_C -y^2\, dx + x\, dy + z^2\, dz$를 구하시오.

1번. 2차원 영역 $D = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1,\ \sqrt{x} \le y \le 1\}$라고 두면, 푸비니 정리에 의해 $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{y^3+1}\,dy \right) dx = \iint_D \sqrt{y^3+1}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sqrt{y^3+1}\,dx \right) dy$이 성립한다. 그리고 $\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} \sqrt{y^3+1}\,dx \right) dy = \int_0^1 y^2\sqrt{y^3+1}\,dy = \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.



정답: $\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

2번. 문제에서 정의된 2차원 영역 $D \ni (x,y)$에 대하여 $u = x-y$, $v = x+3y$로 치환하면 $(u,v) \in D_* = \{(u,v)\,|\,-1 \le u \le 3,\ -1 \le v \le 3\}$이다. 이 치환은 일대일 대응이고 $x = \frac{1}{4}(3u+v)$, $y = -\frac{1}{4}(u-v)$가 되어 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{4}$이므로, 다중적분의 치환적분법에 의해 다음과 같이 계산된다.

$$\iint_D (x+3y)(x-y)\,dxdy = \iint_{D_*} \frac{u\,v}{4}\,dudv = \int_{-1}^3 \left(\int_{-1}^3 \frac{u\,v}{4}\,du \right) dv = 4.$$

정답: 4

3번. $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$에서 $z \le 3$는 곡면 S가 $1 \le x^2+y^2 \le 10$에서 정의되어 있다는 것을 의미한다. 따라서, S는 2차원 영역 $1 \le x^2+y^2 \le 10$ 상에서 2변수 함수 $z = \sqrt{x^2+y^2-1}$의 그래프로 정의된 곡면이다. 따라서, 다음 과정에 따라 적분을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\iint_S z\,dS &= \iint_{1\le x^2+y^2\le 10} \sqrt{x^2+y^2-1}\,\sqrt{1+\|\nabla z\|^2}\,dxdy \\
&= \iint_{1\le x^2+y^2\le 10} \sqrt{2(x^2+y^2)-1}\,dxdy \\
\text{극좌표변환과 푸비니정리} \to \quad &= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\sqrt{10}} \sqrt{2r^2-1}\ r\,dr \right) d\theta \\
t = 2r^2-1\text{로 치환} \to \quad &= \frac{\pi}{3}\left(19\sqrt{19}-1\right).
\end{aligned}$$

정답: $\frac{\pi}{3}\left(19\sqrt{19}-1\right)$

4번. $(x-1)^2+y^2 \le 1$상에서 2변수 함수 $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$로 정의된 곡면 S의 면적은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\iint_S 1\,dS &= \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} \sqrt{1+\|\nabla z\|^2}\,dxdy \\
&= \iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} \sqrt{1+\frac{1}{4}}\,dxdy = \frac{\sqrt{5}}{2}\iint_{(x-1)^2+y^2\le 1} 1\,dxdy = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi.
\end{aligned}$$

정답: $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$

5번. 주어진 곡면을 S라 하면, S는 $z>0$인 부분 $S^+\left(z=\sqrt{16-(x^2+y^2)}\right)$과 $z<0$인 부분 $S^-\left(z=-\sqrt{16-(x^2+y^2)}\right)$의 곡면들로 이루어져 있다. 그리고 이들 두 곡면은 $x^2+y^2\le 12$인 부분에서 정의되어 있고 대칭성에 의해 같은 면적을 갖는다. 따라서,

$$\begin{aligned}
\text{area}(S) &= 2\iint_{S^+} 1\,dS \\
&= 2\iint_{x^2+y^2\le 12}\sqrt{1+\|\nabla z\|^2}\,dxdy \\
&= 2\iint_{x^2+y^2\le 12}\frac{4}{\sqrt{16-(x^2+y^2)}}\,dxdy \\
\text{극좌표변환과 푸비니정리} \to\quad &= 2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{4}{\sqrt{16-r^2}}\,r\,dr\right)d\theta \\
t=16-r^2\text{로 치환} \to\quad &= 32\pi.
\end{aligned}$$

정답: <u>32π</u>

6번. 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z)=(2xyz,\ x^2z,\ x^2y)$은 전체공간 $\mathbb{R}^3$(볼록집합)에서 $\nabla\times\mathbf{F}=(0,0,0)$이므로 푸앵카레 보조정리에 의해 $\mathbb{R}^3$ 전체영역에서 $\mathbf{F}(x,y,z)=\nabla\phi(x,y,z)$인 스칼라함수 $\phi(x,y,z)$가 존재한다($\mathbf{F}$가 보존장). 세개의 등식 $\phi_x=2xyz$, $\phi_y=x^2z$, $\phi_z=x^2y$으로 부터 $\phi(x,y,z)=x^2yz+(\text{상수})$ 이다. 따라서, 구하는 선적분 $\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\phi(C(2))-\phi(C(1))=\phi(2,1,2)-\phi(1,1,1)=7$.

정답: <u>7</u>

7번. 3차원 영역 V의 경계 $S=\partial V$는 4개의 삼각형 평면으로 이루어져있다. 이들 면상에 외향단위벡터를 $\mathbf{n}$이라 하면 발산정리에 의해 $\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iiint_V\nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz=\iiint_V 2(y+1)\,dxdydz$이 성립한다. 입체영역 V는 네 점 $(0,0,0)$, $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,6)$를 꼭지점으로 하는 사면체이므로, 다음과 같이 계산이 이루어진다.

$$\begin{aligned}
\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS &= 2\iiint_V y+1\,dxdydz \\
\text{삼중적분의 푸비니정리} \to\quad &= 2\iint_{x+y\le 3,\,x\ge 0,\,y\ge 0}\left(\int_0^{6-2(x+y)} y+1\,dz\right)dxdy \\
&= 2\iint_{x+y\le 3,\,x\ge 0,\,y\ge 0} 2(y+1)(3-x-y)\,dxdy \\
\text{이중적분의 푸비니정리} \to\quad &= 4\int_0^3\left(\int_0^{3-x}(y+1)(3-x-y)\,dy\right)dx=\frac{63}{2}.
\end{aligned}$$

정답: $\underline{\dfrac{63}{2}}$

8번. $0 \le t \le 2\pi$ 일 때, $C(t) = (\cos t, \sin t)$ 는 점$(1,0)$에서 시작해서 중심 $(0,0)$이고 반지름 1인 원둘레를 반시계방향으로 움직여서 점$(1,0)$으로 되돌아오는 단순폐곡선이다. 따라서, 그린정리를 사용하면 $\int_C (x^4+3y)\,dx + (4x - e^{y^2})\,dy = \iint_{x^2+y^2\le 1} \dfrac{\partial(4x-e^{y^2})}{\partial x} - \dfrac{\partial(x^4+3y)}{\partial y}\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} 1\,dxdy = \text{area}(x^2+y^2\le 1) = \pi$ 이다.

정답: $\underline{\pi}$

9번. $(x,y,z) = T(u,v,w) = \left(u, 2v, \frac{w}{2}\right)$ 에 의한 변수변환을 하면, T는 중심이 원점이고 반지름이 1인 구 $V_* = \{(u,v,w) \mid u^2+v^2+w^2 \le 1\}$ 에서 타원체 V 내부로의 일대일 대응이 된다. 다중적분의 치환적분법에 의해 $\iiint_V z^2\, dxdydz = \iiint_{V_*} \left(\frac{w}{2}\right)^2 \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$ 이 성립한다. 여기서 $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = 1$ 이고 따라서 다음 과정들에 의해 적분이 계산된다.

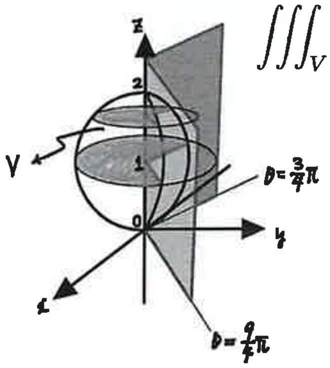
$$\iiint_{V_*} \left(\frac{w}{2}\right)^2 \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw = \iint_{u^2+v^2\le 1} \left[\int_{-\sqrt{1-(u^2+v^2)}}^{\sqrt{1-(u^2+v^2)}} \frac{w^2}{4}\, dw\right] dudv$$

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1} \frac{1}{6}\sqrt{1-(u^2+v^2)}^3\, dudv$$

극좌표변환 → $$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{6}\sqrt{1-r^2}^3\, r\,dr\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{30} d\theta = \frac{\pi}{15}.$$

(*다른 풀이법) 구면좌표변환을 이용해도 된다.

10번. $V = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1,\ y \le |x|\} = \{(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi) \mid 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi \le \theta \le \frac{9}{4}\pi,\ 0 \le \rho \le 2\cos\phi\}$ 이므로 구면좌표변환을 해서 푸비니 정리를 써서 적분을 행하면 다음과 같다.



$$\iiint_V x^2+y^2\, dxdydz = \iint_{(\phi,\theta)\in[0,\frac{\pi}{2}]\times[\frac{3}{4}\pi,\frac{9}{4}\pi]} \left(\int_0^{2\cos\phi} (\rho^2\sin^2\phi)\rho^2\sin\phi\, d\rho\right) d\phi d\theta$$

$$= \iint_{(\phi,\theta)\in[0,\frac{\pi}{2}]\times[\frac{3}{4}\pi,\frac{9}{4}\pi]} \frac{1}{5}(2\cos\phi)^5\sin^3\phi\, d\phi d\theta$$

$$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}\sin^3\phi\cos^5\phi\, d\phi\right) d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}\sin\phi(1-\cos^2\phi)\cos^5\phi\, d\phi$$

$t=\cos\phi$로 치환 → $$= \frac{48}{5}\pi\int_0^1 (1-t^2)t^5\, dt = \frac{2}{5}\pi.$$

11번. 회전곡면의 매개변수곡면은, $(t,\theta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ 일 때, $X(t,\theta) = ((a+b\ \cos t)\ \cos\theta,\ (a+b\ \cos t)\ \sin$ 로 표현할수 있다. 이 때, $X_t\times X_\theta = (-b(a+b\ \cos t)\cos t\cos\theta, -b(a+b\ \cos t)\cos t\sin\theta, -b(a+b\ \cos t)$ s 따라서, 회전곡면의 넓이를 다음 과정을 통해 계산할 수 있다.

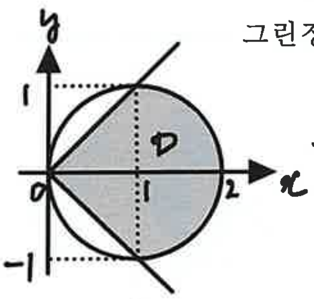
$$\iint_{(t,\theta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \|X_t\times X_\theta\|\, dtd\theta = \iint_{(t,\theta)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi]} b\,(a+b\ \cos t)\, dtd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} b\,(a+b\ \cos t)\, dt\right) d\theta = \int_0^{2\pi} 2\pi ab\, d\theta = 4\pi^2 ab.$$

12번. $\mathbb{R}^2$ 전체에서 $\frac{\partial}{\partial x}(2xy-3) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2+y^2)$ 이고 $\mathbb{R}^2$는 볼록집합이므로 푸앵커레 보조정리에 의해 벡터장 $\mathbf{F} = (3x^2+y^2, 2xy-3)$은 보존장이다. 따라서, $\phi(x,y)$를 $\mathbf{F}$의 포

텐셜함수라고 하면 (1) $\phi_x = 3x^2 + y^2$, (2) $\phi_y = 2xy - 3$을 만족해야 한다. 방정식(1)로 부터 $\phi(x,y) = x^3 + xy^2 + A(y)$이고 이를 방정식(2)에 대입하면 $A'(y) = -3$을 얻는다. 따라서 $A(y) = -3y +$ (상수)가 되어 $\phi(x,y) = x^3 + xy^2 - 3y +$ (상수)을 얻는다. 그러므로, $0 \le t \le \pi$에서 곡선 $C(t) = (t\sin t, e^t\cos t)$ 상에서 선적분 $\int_C \mathbf{F}\cdot ds = \phi(C(\pi)) - \phi(C(0)) = \phi(0, -e^\pi) - \phi(0,1) = 3(e^\pi + 1)$이 된다.

13번. 영역 D가 $(x-1)^2 + y^2 \le 1$이고 $|y| \le x$을 만족하는 2차원 영역이고 그 경계 ∂D는 $(0,0)$에서 $(1,-1)$까지 직선이고, $(1,-1)$에서 $(1,1)$까지는 반시계방향으로 중심이 $(1,0)$이고 반지름 1인 원 위를 지나는 곡선(반원)이고, $(1,1)$에서 $(0,0)$까지는 직선으로 이루어진 단순폐곡선이다. 그러므로 영역 D는 $(0,0)$, $(1,-1)$, $(1,1)$을 꼭지점으로 하는 삼각형(면적이 1)과 세 점 $(1,-1)$, $(2,0)$, $(1,1)$을 지나는 반원의 내부(면적이 $\frac{\pi}{2}$)로 구성되어 있다. 그린정리를 적용하면 다음과 같이 계산할 수 있다.



$$\int_{\partial D} \left(e^{-x^2} - y\right) dx + (xy + \sin y)dy = \iint_D (xy+\sin y)_x - \left(e^{-x^2} - y\right)_y \, dxdy$$
$$= \iint_D y + 1\, dxdy$$
$$\text{영역}D\text{가 x-축 대칭} \rightarrow \quad = \iint_D 1\, dxdy = \text{area}(D) = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

14번. 곡선 C가 평면 $y+z=2$와 원기둥면 $x^2+y^2=1$의 교선으로서 방향이 z-축에 대하여 반시계방향을 취한다. C가 경계가 되는 곡면 S를 $y+z=2$위의 평면영역 $S = \{(x,y,z)\,|\, z = 2-y,\ x^2+y^2 \le 1\}$으로 선택했을 때, S상에서 벡터장 $\mathbf{F}(x,y,z) = (-y^2, x, z^2)$에 대해 Stokes정리를 적용하기 위해서는 S상에서 단위법선벡터를 $\mathbf{n} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$으로 취해야한다. 그런데 $\nabla\times\mathbf{F} = (0,0,1+2y)$이므로 Stokes정리로 부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\int_C -y^2dx + xdy + z^2dz = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$$
$$z = 2-y\text{의 그래프로 정의된 곡면 } S \rightarrow \quad = \iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{1+2y}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\|\nabla z\|^2}\,dxdy$$
$$\sqrt{1+\|\nabla z\|^2} = \sqrt{2} \rightarrow \quad = \iint_{x^2+y^2\le 1} 1+2y\,dxdy$$
$$\text{영역}x^2+y^2\le 1\text{가 x-축 대칭} \rightarrow \quad = \iint_{x^2+y^2\le 1} 1\,dxdy = \text{area}(x^2+y^2\le 1) = \pi.$$