★**단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점이고 답이 틀리면 0점)

1번. $\frac{x^3}{y^2} + z^2 + 6xyz = 1$의 관계식에서 $z \geq -1$에서 z가 변수 x와 y의 함수라고 하자. 이때 $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$를 구하시오.

2번. 미분가능인 함수 $f(x,y)$가 점 (x_0,y_0)에 대하여 $f(x_0,y_0) = 2$이고, 두 벡터 $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$과 $\mathbf{w} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$ 으로의 방향미분 $D_{\mathbf{v}} f(x_0,y_0) = 2\sqrt{5}$와 $D_{\mathbf{w}} f(x_0,y_0) = \sqrt{2}$ 을 갖는다고 한다. 이 때, $F(x,y) = e^{f(x,y)}$의 기울기 벡터 $\nabla F(x_0,y_0)$를 구하시오.

3번. 함수 $f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^2 - y^2 \sin x + 3y^2}{x^2+y^2}\right)$가 원점 $(0,0)$에서 연속이 되도록 함숫값 $f(0,0)$를 정의하시오.

4번. $f(x,y,z) = 0$ 이 만드는 등위곡면이 점 $(2,1,3)$을 포함하고 이 점에서 접평면이 존재한다고 가정하자. 모든 실수 t와 s에 대하여 $f(2+t,\ 1-t^2,\ 3-4t+t^2) = 0$ 과 $f(1+s^2,\ s^3,\ s+2) = 0$ 이 성립한다고 했을 때, 점 $(2,1,3)$에서 이 곡면에 접하는 접평면의 방정식을 구하시오.

5번. 함수 $f(x,y) = x\tan^{-1} y$의 등위곡선 $f(x,y) = \pi$ 위의 점 $(4,1)$에서 이 등위곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하시오.

6번. 함수 $f(x,y) = x^3 - 3x + 3xy^2$의 극댓점, 극솟점, 안장점들을 모두 구하시오.

7번. 시간 $t \geq 0$의 매개변수곡선 $C(t) = (\sin(\pi t),\ \cos(\pi t),\ 2t\sqrt{t})$를 따라 움직이는 물체가 $t = 1$ 부터는 이 시점의 속도로 직선운동을 한다. $t = 4$일 때 이 물체의 위치를 구하시오.

8번. 함수 $f(x,y) = 6(x^2 - y)$ 와 매개변수곡선 $C(t) = (t^2, t^2)$ $(1 \leq t \leq 2)$ 에 대해 선적분 $\int_C f(x,y)\,ds$를 구하시오.

★ **서술형**: 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점이고 풀이과정에 대한 가산점 있음)

9번. $c > 0$에 대하여, 곡면 $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ 상의 임의의 점 (x_0,y_0,z_0)에서 접평면의 x절편, y절편, z절편의 합은 c임을 보여라.

10번. 곡선 C가 $2y = 3x^{\frac{2}{3}}$ $(1 \leq x \leq 8)$의 그래프일 때, 선적분 $\int_C \frac{x^2}{y^3}\,ds$를 구하시오.

11번. 3차원 공간 상의 등위집합 $x + 2y + z = 4$의 점들 중에 점 $(1,0,-2)$로 부터 최소 거리가 되는 점을 라그랑쥬 승수법을 이용해서 구하시오.

12번. 미분가능인 함수 f에 대하여 $w = f(x,y)$ 이고 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$로 가정될 때, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$ 임을 보여라.

13번. 2차원 평면 상의 세 점 $(0,0), (6,0), (0,6)$을 꼭지점으로 갖는 삼각형 영역 D 에서 함수 $f(x,y) = xy^2 + x^2y - 3xy$ 의 최댓값을 구하시오.

14번. 영역 $D = [0,1]\times[0,1]$을 x-축과 y-축으로 각각 n등분을 하여 R_{ij} $(i,j = 1,2,\cdots,n)$들로 분할한 후에, 리만합을 이용하여 $\iint_D x + y\,dA$를 구하시오.

1번. 주어진 식 $\frac{x^3}{y^2}+z^2+6xyz=1$에 $x=1$, $y=1$을 대입하면, $z^2+6z=0$이고 $z\geq -1$이므로 $z=0$. 그리고 주어진 식의 양변은 x와 y 두 독립변수의 함수로서 일치하므로 각 변수로 편미분한 방정식들로 부터 정리해서 풀면

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1,y=1} = \left.\frac{-3x^2/y^2-6yz}{2z+6xy}\right|_{x=1,y=1,z=0} = -\frac{1}{2},$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=1,y=1} = \left.\frac{2x^3/y^3-6xz}{2z+6xy}\right|_{x=1,y=1,z=0} = \frac{1}{3}.$$

을 얻는다.

정답: $z_x=-\frac{1}{2}, \quad z_y=\frac{1}{3}$

2번. $f(x,y)=e^{f(x,y)}$로 부터 $\nabla F(x_0,y_0)=e^{f(x_0,y_0)}\nabla f(x_0,y_0)$이다. 주어진 방향미분값으로 부터

$$\mathbf{v}\cdot\nabla f(x_0,y_0)=2\sqrt{5}, \quad \mathbf{w}\cdot\nabla f(x_0,y_0)=\sqrt{2}$$

이고 이를 행렬방정식으로 쓰면

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{5} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

이 방정식을 풀면 $\nabla f(x_0,y_0)=(\sqrt{10},\sqrt{10})$이고 따라서 $\nabla F(x_0,y_0)=e^2(\sqrt{10},\sqrt{10})$ 또는$e^2\sqrt{10}(1,1)$.

정답: $e^2(\sqrt{10},\sqrt{10})$

3번. $f(x,y)=\ln\left(3-\frac{y^2\sin x}{x^2+y^2}\right)$으로 쓸 수 있고, $\left|\frac{y^2\sin x}{x^2+y^2}\right|\leq|\sin x|\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$ 이므로 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2\sin x}{x^2+y^2}=0$이 된다. 따라서, $f(0,0)=\ln 3$으로 정의하면 원점에서 연속이 된다.

정답: $\ln 3$

4번. 점 $P(2,1,3)$에서 구하는 접평면의 법선벡터를 $\mathbf{n}$이라 두면, $\mathbf{n}$은 점 P에서 두 곡선 $C_1(t)=\left(2+t,1-t^2,3-4t+t^2\right)$ 과 $C_2(s)=\left(1+s^2,s^3,s+2\right)$의 속도벡터들 $C_1'(0)=(1,0,-4)$와 $C_2'(1)=(2,3,1)$에 모두 수직이다. 따라서, $\mathbf{n}=C_1'(0)\times C_2'(1)=(12,-9,3)$으로 택하면 접평면의 방정식은 $12(x-2)-9(y-1)+3(z-3)=0$. 물론, $4x-3y+z=8$도 가능하다.

정답: $4x-3y+z=8$

5번. $\nabla f(x,y)=\left(\tan^{-1}y,\frac{x}{1+y^2}\right)$이고 $\nabla f(4,1)=\left(\frac{\pi}{4},2\right)$는 등위곡선 $f(x,y)=\pi$위의 점 $(4,1)$에서 등위곡선에 수직한 벡터이다. 따라서, 점 $(4,1)$에서 등위곡선에 접하는 접선의 방정식은 $\left(\frac{\pi}{4},2\right)\cdot(x-4,y-1)=0$ 으로 표현된다. 물론, $\frac{\pi}{4}x+2y=\pi+2$와 $\pi x+8y=4(\pi+2)$ 역시 가능하다.

(참고) 다른 해법으로는 음함수 미분법을 사용해서 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4,y=1} = -\left.\frac{(1+y^2)\tan^{-1}y}{x}\right|_{x=4,y=1} = -\frac{\pi}{8}$이 접선의 기울기라는 사실을 이용해도 된다.

정답: $\underline{\pi x + 8y = 4(\pi+2)}$

6번. 임계점을 구하기 위해 $\nabla f(x,y) = (3x^2-3+3y^2,\ 6xy) = (0,0)$로 두면 $x^2+y^2-1=0$, $xy=0$을 얻는다. 따라서 네 점 $(0,\pm1)$과 $(\pm1,0)$들이 모든 임계점이다. 이들 임계점들 중에서 극대, 극소, 안장점을 판별하기 위해 f의 Hessian을 계산하면 다음과 같다.

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

1) $(0,\pm1)$ 은 안장점

$$\det\left(H_f(0,\pm1)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & \pm6 \\ \pm6 & 0 \end{bmatrix}\right) = -36 < 0$$

2) $(1,0)$ 는 극솟점, $(-1,0)$는 극댓점

$$a_{11} = \pm6, \quad \det\left(H_f(\pm1,0)\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \pm6 & 0 \\ 0 & \pm6 \end{bmatrix}\right) = 36 > 0.$$

정답: $\underline{(0,\pm1)\text{은 안장점, } (1,0)\text{는 극솟점, } (-1,0)\text{는 극댓점}}$

7번. 물체는 $0 \le t \le 1$에서는 $C(t) = (\sin(\pi t),\ \cos(\pi t),\ 2t\sqrt{t})$를 따라 움직이다가 $t=1$에서 $C(1) = (0,\ -1,\ 2)$의 위치에 다다르고 이때 속도는 $C'(1) = (-\pi,\ 0,\ 3)$이 된다. 이 시각 이후($t \ge 1$) 에는 물체가 $C'(1)$의 속도로 직선운동을 로하므로 $C(t) = (-\pi(t-1),\ -1,\ 3(t-1)+2)$가 된다. 따라서 t=4에서의 위치는 $C(4) = (-3\pi, -1, 11)$이다.

정답: $\underline{(-3\pi, -1, 11)}$

8번. $f(C(t)) = 6(t^4 - t^3)$ 이고 $|C'(t)| = |(2t, 2t)| = 2\sqrt{2}\,t$이므로 f의 C상에서의 선적분은 다음과 같이 계산된다.

$$\int_C 6(x^2-y)\,ds = \int_{t=1}^{t=2} f(C(t))\,|C'(t)|\,dt$$
$$= 12\sqrt{2}\int_1^2 (t^5 - t^3)dt = 12\sqrt{2}\ \left[\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4}\right]_{t=1}^{t=2} = 81\sqrt{2}.$$

정답: $\underline{81\sqrt{2}}$

9번. 곡면 위의 한 점을 (x_0, y_0, z_0)라고 하고, $f(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$라고 하면. $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{2\sqrt{y}}, \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)$이고, $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$이다. 따라서, 접평면의 방정식은 $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0) = 0$이다. 이것을 정리하면 $\frac{x}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z}{2\sqrt{z_0}} = \frac{x_0}{2\sqrt{x_0}} + \frac{y_0}{2\sqrt{y_0}} + \frac{z_0}{2\sqrt{z_0}} = \frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}}{2} = \frac{\sqrt{c}}{2}$이다. 따라서, x절편, y절편, z절편은 각각 $\sqrt{cx_0}, \sqrt{cy_0}, \sqrt{cz_0}$이다. 그러므로 이들의 합은 $\sqrt{cx_0} + \sqrt{cy_0} + \sqrt{cz_0} = \sqrt{c}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}) = \sqrt{c}\sqrt{c} = c$이다.

10번. 곡선을 $C(t) = \left(t, \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}\right)$, $(1 \le t \le 8)$로 매개화하면, $C'(t) = \left(1, t^{-\frac{1}{3}}\right)$이 되고, 따라서

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \int_1^8 \frac{8}{27}\sqrt{1+t^{-\frac{2}{3}}}\,dt \\ &= \frac{8}{27}\int_1^8 t^{-\frac{1}{3}}\sqrt{t^{\frac{2}{3}}+1}\,dt \\ &= \frac{4}{9}\int_2^5 \sqrt{u}\,du \quad \left(u = t^{\frac{2}{3}}+1\right) \\ &= \frac{8}{27}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

이다.

11번. 이 문제는 $g(x,y,z) \equiv x+2y+z-4 = 0$라는 제약조건 아래 $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2$의 최소값을 구하는 문제와 동일하다. 라그랑지 승수법에 의하면 최소가 되는 점 (x,y,z)는 $\nabla f = \lambda \nabla g$를 만족해야 한다. 즉, $(2(x-1),\ 2y,\ 2(z+2)) = \lambda(1,\ 2,\ 1)$ 이다. 따라서, $x = \frac{\lambda}{2}+1, y = \lambda, z = \frac{\lambda}{2} - 2$이고, 제약조건 $x+2y+z = 4$로 부터 $\lambda = \frac{5}{3}$이고 $(x,y,z) = \left(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{7}{6}\right)$에서 최소값을 갖는다.

12번. 합성함수 미분법에 의해

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial w}{\partial y}r\cos\theta.\end{aligned}$$

또한 $\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\theta\right)^2$ 이므로 다음 등식이 성립한다:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2.$$

13번. D의 내부에서 f는 미분가능하므로 D의 내부에 있는 f의 극점은 f의 임계점이다. $f_x = 2xy + y^2 - 3y = 0, f_y = x^2 + 2xy - 3x = 0$ 으로부터 D의 내부에 있는 f의 임계점은 $(1,1)$이다.

Typeset by LaTeX

한편, D의 경계는 x축에 해당되는 부분 C_1, y축에 해당되는 부분 C_2, 그리고 $x+y=6$에 해당되는 부분 C_3로 구성된다. C_1과 C_2상에서는 함수 f의 함숫값은 항상 0이다.

C_3에 해당되는 제약조건 $g(x,y)=x+y-6=0$에서 $\nabla g=(1,1)\neq \mathbf{0}$ 이므로 라그랑주 승수법을 사용하여 C_3에서 f의 극점을 구할 수 있다. $\nabla f=\lambda\nabla g$, 즉, $(2xy+y^2-3y, x^2+2xy-3x)=\lambda(1,1)$을 만족하는 실수 λ가 존재하기 위해서는 $2xy+y^2-3y=x^2+2xy-3x$을 만족해야한다. 따라서, $0=x^2-y^2-3(x-y)=(x-y)(x+y-3)$이고, 제약조건 $x+y=6$에서는 $x=y$ 이어야하므로 C_3에 있는 f의 극점은 $(3,3)$이다.

각 후보점들 $(1,1),(3,3)$, C_1상의 점들, C_2상의 점들에서 f의 함숫값을 비교해보면 최댓값은 $f(3,3)=27$이 된다.

14번. 영역 D를 x구간과 y구간을 각각 n 등분했을 때, (i,j)–분할을 $R_{ij}=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]\times\left[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}\right]$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$라고 하고, 각각의 R_{ij}내에서 $\mathbf{x}_{ij}=\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)$를 선택하자. 이 때 R_{ij}의 면적은 $\Delta x\Delta y=\frac{1}{n^2}$가 된다. 정의에 의해 연속함수 $f(x,y)=x+y$의 영역 D 상에서 R_{ij}에 의한 리만합은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} S_n \equiv \sum_{\mathbf{x}_{ij}} f(\mathbf{x}_{ij})\Delta x\Delta y &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i}{n}+\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^3}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n^2(n+1)}{n^3} \end{aligned}$$

연속함수는 이중적분가능이고 $n\to\infty$ 에 따라 $S_n\to 1$로 수렴하므로 $\iint_D x+y\,dA=1$.