일반수학2(MTH1002) 중간시험

2024년 10월 21일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

– 부정행위는 절대 금함.	**– 50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.**
– 이름과 학번은 답안지의 1면과 3면에 볼펜으로 기입할 것.	**– 계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.**

★ **단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. $1 \le x \le 2$인 구간에서 정의된 곡선 $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$의 길이를 구하시오.

2. 다음 중 극한값이 존재하는 것을 모두 고르시오.

(A) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4 - x^4}{x^2+y^2}$ (B) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \sin y}{x^2+y^2}$

(C) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (D) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

3. $f(x,y) = x^2 \tan(xy)$에 대해 점 $\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$에서 기울기 벡터 $\nabla f\left(1, \frac{\pi}{3}\right)$를 구하시오.

4. $(x,y) = (16,8)$에서 $f(x,y) = \sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$의 일차근사식을 사용하여, $\sqrt[4]{16.08}\sqrt[3]{7.94^2}$의 근삿값을 구하시오.

5. 다음 함수에 대해 $(0,0)$에서 $\mathbf{u}$-방향 미분계수를 구하시오. (존재하지 않는다면, 답란에 '존재하지 않음'이라 기입하시오.)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad \mathbf{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

6. 다음 함수의 안장점을 모두 구하시오. (존재하지 않는다면, 답란에 '존재하지 않음'이라 기입하시오.)

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 6xy$$

7. 다음 적분값을 구하시오.

$$\int_0^3 \int_0^1 \sqrt{x+y}\, dxdy$$

8. D가 평면에서 x-축, $y = \ln x$, $x = e$로 둘러싸인 영역일 때, 다음 이중적분의 값을 구하시오.

$$\iint_D x^2\, dA$$

★ **서술형** 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. 매개변수 곡선 $C(t) = (e^t,\ e^{-t},\ \sqrt{2}t)$ $(0 \le t \le 2)$에 대해 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C \frac{1}{(x+y)(z^2+8)}\, ds$$

10. 평면에서 극좌표로 표현된 곡선인 $r = e^{2\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$를 C라고 할 때, 다음 선적분을 구하시오.

$$\int_C \ln(x^2+y^2)\, ds$$

11. $\mathbb{R}^3$에서 곡면 $x^2 - y + z^2 = 0$과 $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$의 교선 위의 점 $(-1,2,1)$에서 이 교선에 접하는 직선의 방정식을 구하시오. (단, 대칭 방정식의 형태로 표현하시오.)

12. 함수 f는 $\mathbb{R}$에서 C^2 함수이고,

$$f(3) = 1, \quad f'(3) = 2, \quad f''(3) = 4$$

이다. 다음과 같이 정의된 함수 w에 대하여, 점 $P(2,1,-2)$에서 $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$의 값을 각각 구하시오.

$$w(x,y,z) = f(r) \qquad (r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

13. $z \neq 0$에서 정의된 다음 함수의 임계점을 모두 구하고, 각각의 임계점이 극댓점인지, 극솟점인지, 안장점인지 분류하시오.

$$f(x,y,z) = 2xy + xz + yz + \frac{1}{z}$$

14. $f(x,y,z) = 2xy - 12x + 4z^2$이고 $g(x,y,z) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 36$일 때, $g(x,y,z) = 0$을 만족하는 (x,y,z)에 대해, $f(x,y,z)$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

*1*번 정답. $\dfrac{59}{24}$ □

*2*번 정답. (A), (B), (D) □

*3*번 정답. $\left(2\sqrt{3}+\dfrac{4\pi}{3},\ 4\right)$ □

*4*번 정답. 7.97 □

*5*번 정답. $\dfrac{16}{15}$ □

*6*번 정답. $(0,0),\ (0,-2)$ □

*7*번 정답. $\dfrac{4}{15}\left(31-9\sqrt{3}\right)$ □

*8*번 정답. $\dfrac{1}{9}\left(2e^3+1\right)$ □

*9*번 풀이. $C'(t)=(e^t,-e^{-t},\sqrt{2})$ 이고,
$\|C'(t)\|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}=e^t+e^{-t}$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{(x+y)(z^2+8)}\ ds &= \int_0^2 \frac{1}{(2t^2+8)}dt=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{t^2+4}dt\\ &= \left[\frac{1}{4}\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^2=\frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

□

*10*번 풀이. $\dfrac{dr}{d\theta}=2e^{2\theta}$ 이므로

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\ d\theta=\sqrt{5}e^{2\theta}\ d\theta$$

이다.

$$\begin{aligned}\int_C \ln(x^2+y^2)\ ds &= \int_0^\pi 4\sqrt{5}\theta e^{2\theta}\ d\theta = 4\sqrt{5}\left[\frac{1}{2}\theta e^{2\theta}-\frac{1}{4}e^{2\theta}\right]_0^\pi\\ &= \sqrt{5}\left(2\pi e^{2\pi}-e^{2\pi}+1\right)\end{aligned}$$

□

*11*번 풀이. $f(x,y,z)=x^2-y+z^2$, $g(x,y,z)=4x^2+y^2+z^2$ 이라 하면,

$$\nabla f(-1,2,1)=(-2,-1,2),\quad \nabla g(-1,2,1)=(-8,4,2)$$

이다. 접선의 방향벡터는 두 접평면에 포함되므로,

$$\nabla f(-1,2,1)\times\nabla g(-1,2,1)=(-10,-12,-16)$$

이다. 따라서 접선의 대칭방정식은

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-1}{8}$$

이다. □

*12*번 풀이. 연쇄법칙과 점 $P(2,1,-2)$ 에서 $r=3$ 이라는 것을 이용하면,

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\frac{x}{r}\ ,\qquad \frac{\partial w}{\partial x}(P)=f'(3)\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

이다. $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 을 x 에 대해 편미분하여 점 P 에서 값을 구하면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=f''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2+f'(r)\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(P)&=f''(3)\left(\frac{2}{3}\right)^2+f'(3)\left(\frac{1}{3}-\frac{2^2}{3^3}\right)=\frac{58}{27}\end{aligned}$$

이다. □

*13*번 풀이. $\nabla f=\left(2y+z,\ 2x+z,\ x+y-\dfrac{1}{z^2}\right)=(0,0,0)$ 에서 임계점을 구하면 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-1\right)$ 이다. 이 때, 임계점에서 헤시안을 구하면,

$$H_f=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&1\\1&1&\frac{2}{z^3}\end{pmatrix},\qquad H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$$

이고, 임의의 벡터 $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$ 에 대하여,

$$\mathbf{u}^T H\mathbf{u}=4u_1u_2+2u_1u_3+2u_2u_3-2u_3^2$$

이다. $\mathbf{u}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)^T$ 일 때, $\mathbf{u}^T H\mathbf{u}>0$ 이며,
$\mathbf{u}=(0,0,1)^T$ 일 때, $\mathbf{u}^T H\mathbf{u}<0$ 이다.
따라서, 구한 임계점은 안장점이다. □

*14*번 풀이. $g(x,y,z)=0$ 를 만족하는 점에서 $\nabla g\neq(0,0,0)$ 이므로, 라그랑주 승수법에 의하여 $\nabla f=\lambda\nabla g$ 를 만족하는 λ 가 존재한다.

$$(2y-12,\ 2x,\ 8z)=\lambda(8x,\ 2y,\ 8z)$$

세 번째 성분, $8z=\lambda(8z)$ 에서 $\lambda=1$ 또는 $z=0$ 이다.

(i) $\lambda=1$ 일 때, $2y-12=8x$, $2x=2y$ 에서 $x=y=-2$ 이고, 제약조건을 이용하면 $z=\pm2$ 이다. 따라서 살펴볼 점은 $(-2,-2,\pm2)$ 이다.

(ii) $z=0$ 일 때, 만일 $y=0$ 이면 두 번째 성분에서 $x=0$ 이고, 이 경우 제약조건을 만족할 수 없으므로, $y\neq0$ 이다.
$\lambda=\dfrac{x}{y}$ 를 이용하면, $2y-12=8\left(\dfrac{x}{y}\right)x$ 이고, 제약조건을 만족하는 점을 찾으면, 살펴볼 점은 $(0,6,0)$, $\left(\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-3,0\right)$ 이다.

$$f(-2,-2,\pm2)=48,\quad f(0,6,0)=0,\quad f\left(\pm\frac{3\sqrt{3}}{2},-3,0\right)=\mp27\sqrt{3}$$

이므로 최댓값은 48, 최솟값은 $-27\sqrt{3}$ 이다. □