

일반수학1(MTH1901) 기말시험

2025년 6월 16일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

– 부정행위는 절대 금함.

– 이름과 학번은 답안지의 1면과 3면에 볼펜으로 기입할 것.

– 50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.

– 계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.

★ **단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. 다음 멱급수의 수렴반지름을 구하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$$

2. 원기둥 좌표로 표현된 집합

$$S = \left\{ (r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, 0 \leq z \leq 3 \right\}$$

를 직교좌표로 나타낸 영역의 부피를 구하시오.

3. 공간에서 직교좌표 $(-1, 1, \sqrt{6})$ 로 표현된 점을 구면좌표 (ρ, ϕ, θ) 로 나타내시오. (단, $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$ 이다.)

4. 공간에서 두 평면 $5x - 2y = 1$, $4y - 5z = -7$ 의 교선을 ℓ 이라고 할 때, ℓ 의 매개변수 방정식을 구하시오.

5. 영벡터가 아닌 두 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 가 $\|\mathbf{a}\| = 2\|\mathbf{b}\|$ 와 $\|2\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - 3\mathbf{b}\|$ 를 만족한다. 두 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 의 사잇각을 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 를 구하시오.

6. 다음의 2×2 행렬 A 가 $A^T = A^{-1}$ 를 만족할 때, 실수 a , b , c 를 구하시오. (단, $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이다.)

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}$$

7. 다음 복소수 집합 S 를 복소평면에 나타냈을 때 만들어지는 영역의 넓이를 구하시오.

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq z\bar{z} \leq 9, (z + \bar{z}) \geq 0\}$$

8. 복소수 $z = \frac{\pi}{3}(2 - i)(5 + 2i)$ 가 주어졌을 때, 복소수 e^z 의 실수부를 구하시오.

★ **서술형** 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. $x = 0$ 에서 함수

$$f(x) = \arctan(x) + 4\sqrt{1+x} - x \tan(x)$$

의 2차 테일러 다항식을 구하고, 이를 이용하여 $f(0.1)$ 의 근삿값을 구하시오. (단, 근삿값은 소수로 표현하시오.)

10. $x = 0$ 에서 다음 함수 $f(x)$ 의 테일러 급수를 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 라고 할 때, 일반항 a_n 을 구하시오.

$$f(x) = \frac{1}{5-x} + \ln(5-x)$$

11. 극좌표로 표현된 곡선 $r = 3 \cos(2\theta)$ 위의 점 중에서 $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$ 에 대응하는 점을 차례대로 P, Q 라 하자. 점 P, Q 의 직교좌표를 각각 구하고, xy -평면에서 삼각형 $\triangle OPQ$ 의 넓이를 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

12. 공간에서 세 점 $P(0, -1, -3)$, $Q(5, 2, 1)$, $R(1, 0, 1)$ 을 지나는 평면을 M 이라 하자. 평면 S 는 평면 M 과 평행하고, 평면 M 과 수직거리가 2이다. 이를 만족하는 평면 S 를 모두 구하시오. (단, 평면 S 의 방정식은 $ax + by + cz = d$ 의 형태로 기술하시오.)

13. 평면에서 벡터 $\mathbf{v} = (x, y)$ 를 $\mathbf{a} = (1, -2)$ 에 내린 정사영을 $\mathbf{u} = (z, w)$ 라고 하면, 행렬의 성분이 모두 실수인 2×2 행렬 A 를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(a) 행렬 A 를 구하시오.

(b) 행렬 $(A - kI)$ 의 역행렬이 존재하지 않는 실수 k 의 값을 모두 구하시오. (단, I 는 2차 항등행렬이다.)

14. 복소수 $z = \frac{(1+i)^3}{(\sqrt{3}+i)^4}$ 가 주어졌다.

(a) z 의 크기를 구하시오.

(b) z^{2025} 의 편각의 주요값을 구하시오.

1번 정답.	27	□	11번 풀이. $\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때, $r = \frac{3}{2}$ 이므로, 점 P 의 직교좌표는 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4}\right)$ 이다.
2번 정답.	$\frac{3\pi}{2}$	□	$\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, $r = -\frac{3}{2}$ 이므로, 점 Q 의 직교좌표는 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ 이다. 이 때, $\triangle OPQ$ 의 넓이는
3번 정답.	$\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$	□	$\frac{1}{2} \left \left(\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{OQ} \right) \right = \frac{1}{2} \left \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \right = \frac{9}{8}$
4번 정답.	$x = 1 + 2t, y = 2 + 5t, z = 3 + 4t$ (유일하지 않음)	□	이다. □
5번 정답.	$-\frac{1}{5}$	□	12번 풀이. 평면 M 의 법선벡터 $\mathbf{n}$ 은 $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}$ 과 수직이므로 $\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (5, 3, 4) \times (1, 1, 4) = (8, -16, 2)$
6번 정답.	$a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}, c = -1$	□	와 평행하다. 평면 S 는 평면 M 과 평행하므로, $4x - 8y + z = d$ 로 표현할 수 있다. 두 평면 사이의 수직거리가 2 이므로
7번 정답.	$\frac{7\pi}{2}$	□	$\frac{ 4(0) + (-8)(-1) + (-3) - d }{\sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1}} = 2$
8번 정답.	$\frac{1}{2}e^{4\pi}$	□	를 만족한다. $ 5 - d = 18$ 에서 $d = -13$ 또는 $d = 23$ 이므로, 구하는 평면 S 의 방정식은 $4x - 8y + z = -13 \quad \text{과} \quad 4x - 8y + z = 23$
9번 풀이.			이다. □
$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + 2(1+x)^{-1/2} - \tan(x) - x \sec^2(x),$ $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - (1+x)^{-3/2} - 2 \sec^2(x) - 2x \sec^2(x) \tan(x)$			13번 풀이. (a) $\mathbf{v} = (x, y)$ 를 $\mathbf{a} = (1, -2)$ 에 내린 정사영은 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\ \mathbf{a}\ ^2} \mathbf{a} = \frac{x - 2y}{5} \mathbf{a}$
이고, $f(0) = 4, f'(0) = 3, f''(0) = -3$ 이므로, $x = 0$ 근처에서 2차 테일러 다항식은			이다. 벡터의 성분을 각각 표현하면, $z = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y, \quad w = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}y$
$T_2(x) = 4 + 3x - \frac{3}{2}x^2$			이다. 따라서 행렬 A 는 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$
이다.			이다.
따라서, $f(0.1)$ 의 근삿값은 $T_2(0.1) = 4.285$ 이다.		□	(b) 역행렬이 존재하지 않는 경우는 $\det(A - kI) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{5} - k & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} - k \end{pmatrix} = k^2 - k = 0$
10번 풀이. $\frac{1}{5-x}$ 의 $x=0$ 에서 테일러 급수는			을 만족한다. 따라서 $k=0$ 또는 $k=1$ 일 때, 역행렬이 존재하지 않는다. □
$\frac{1}{5-x} = \frac{1}{5(1-\frac{x}{5})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} x^n$			14번 풀이. (a) 복소수 $1+i$ 의 크기는 $\sqrt{2}$, 복소수 $\sqrt{3}+i$ 의 크기는 2이므로 $ z = \frac{ 1+i ^3}{ \sqrt{3}+i ^4} = \frac{(\sqrt{2})^3}{2^4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
이고, $ x < 5$ 에서 수렴한다.			이다.
$\int_0^x \frac{1}{5-t} dt = \ln(5) - \ln(5-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)5^{n+1}} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} x^n$			(b) 복소수 $1+i$ 의 편각은 $\frac{\pi}{4}$ 이고, 복소수 $\sqrt{3}+i$ 편각은 $\frac{\pi}{6}$ 이다. z 의 편각 $\theta = 3\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$
이므로			이고, z^{2025} 의 편각은 $2025\theta = \frac{2025\pi}{12} = 84(2\pi) + \frac{3\pi}{4}$
$\ln(5-x) = \ln(5) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n} x^n$			이므로 z^{2025} 의 편각의 주요값은 $\frac{3\pi}{4}$ 이다. □
이다. 따라서 $f(x)$ 의 $x=0$ 에서 테일러 급수는			
$\left[\frac{1}{5} + \ln(5)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n}\right)\right] x^n$			
이므로 a_n 은 다음과 같다.			
$a_n = \begin{cases} \frac{1}{5} + \ln(5), & (n=0) \\ \frac{n-5}{n5^{n+1}}, & (n \geq 1) \end{cases}$			