일반수학1(MTH1901) 중간시험

2026년 4월 20일 (월) 18:00 – 19:40

반드시 다음의 주의 사항을 읽고 난 후 문제를 푸시오.

- **부정행위는 절대 금함.**
- **이름과 학번은 답안지의 1면과 3면에 볼펜으로 기입할 것.**
- **50분이 지나기 전에는 퇴실하지 말 것.**
- **계산기 및 기타 연습장은 사용하지 말 것.**

★ **단답형** 1번 - 8번 (문제당 5점, 옳은 답이 아닐 경우 0점, 부분점수 없음)

1. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

2. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin^2 x}{x-\tan x}$$

3. $\arctan 2 + \arctan 3$의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x) = \arcsin\left(2\cos^2 x - 1\right)$에 대하여 미분계수 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하시오.

5. 함수 $f(x) = \int_1^{2x-1} e^{-t^2}\,dt$의 역함수를 g라고 할 때, $g'(0)$의 값을 구하시오.

6. 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_1^e x(\ln x)^2\,dx$$

7. 다음 특이적분의 값을 구하시오.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$$

8. 다음 급수의 수렴, 발산 여부를 판정하시오.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

★ **서술형** 9번 - 14번 (문제당 10점, 답만 쓰면 0점, 풀이 과정 부분점수 있음)

9. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2n+\sin n}$$

10. 함수 $f(x) = 4\arctan x - x - \frac{1}{3}x^3$의 극댓값, 극솟값을 구하시오.

11. 다음 정적분의 값을 구하시오.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

12. 함수 $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$의 $x=0$ 근방에서 일차 근사식을 이용하여 $\sqrt[3]{61}$의 근삿값을 소수점 둘째 자리까지 구하시오.

13. 다음 급수의 수렴, 발산 여부를 각각 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(\sqrt{n}+1)^5}$

14. 다음 급수의 절대수렴, 조건수렴, 발산 여부를 각각 판정하시오.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$

*1*번 정답. $2\ln 2-1$ □

*2*번 정답. 3 □

*3*번 정답. $\frac{3}{4}\pi$ □

*4*번 정답. -2 □

*5*번 정답. $\frac{e}{2}$ □

*6*번 정답. $\frac{e^2-1}{4}$ □

*7*번 정답. $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ □

*8*번 정답. 수렴 □

*9*번 풀이.

$$\frac{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2n+1} \le \frac{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2n+\sin n} \le \frac{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2n-1}$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2n+1} = \frac{1}{2}, \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{2n+\sin n} = \frac{1}{2}$ 이다. □

*10*번 풀이.

$$f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)(3+x^2)}{1+x^2}$$

이고, $f'(x)$ 가 $-1<x<1$ 일 때 양수이고, $|x|>1$ 일 때 음수이다.

따라서, $x=-1$ 일 때 극솟값 $\frac{4}{3}-\pi$ 을 갖고, $x=1$ 일 때 극솟값 $\pi-\frac{4}{3}$ 을 갖는다. □

*11*번 풀이. $x=\sin\theta$ 치환을 사용하고

$$\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{\sin^2 2\theta}{4} = \frac{1-\cos 4\theta}{8}$$

을 이용하면

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{8}d\theta = \frac{\pi}{16}$$

□

*12*번 풀이. 일차근사에 의해 $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x$ 이므로

$$\sqrt[3]{61} = 4\sqrt[3]{1-\frac{3}{64}} \approx 4\left(1-\frac{1}{64}\right) \approx 3.93$$

□

*13*번 풀이. (a) $\left|\frac{\sin n}{3^n}\right| \le \frac{1}{3^n}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$ 은 수렴한다.
(b) $0 \le \frac{2n+3}{(\sqrt{n}+1)^5} \le \frac{5n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{5}{n\sqrt{n}}$ 이고, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n\sqrt{n}}$ 이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(\sqrt{n}+1)^5}$ 은 수렴한다. □

*14*번 풀이. (a)

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \ge \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

이므로 절대수렴하지 않고 교대급수정리에 의해 조건수렴한다.
(b) $\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots n\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots (n-1)\cdot n} \ge 1$ 이므로 발산한다. □